PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR *FUZZY* MENGGUNAKAN DEKOMPOSISI *CHOLESCY*

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh:

IRAWATI
10854004183

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2012

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR *FUZZY* MENGGUNAKAN DEKOMPOSISI *CHOLESCY*

<u>IRAWATI</u>
10854004183

Tanggal Sidang : 28 Juni 2012
Wisuda : November 2012

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Sistem persamaan linear mempunyai peranan di berbagai cabang ilmu sains dan rekayasa. Beberapa masalah yang ada pada sistem persaman linear adalah solusi dari sistem persamaan linear dan parameter dari sistem persamaan bernilai *fuzzy*. Solusi sistem persamaan tersebut diperoleh menggunakan prosedur numerik. Prosedur numerik yang dipergunakan untuk penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* ini adalah Dekomposisi *Cholescy*. Metode Dekomposisi *Cholescy* ini diaplikasikan pada matriks simertis definit positif riil. Penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* menggunakan Dekomposisi *Cholescy* berupa solusi tunggal dalam bentuk parameter.

Kata kunci: *definit positif, Dekomposisi Cholesy, fuzzy*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufik dan hidayahNya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul, **"PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR *FUZZY* MENGGUNAKAN DEKOMPOSISI *CHOLESCY*"** dengan baik dan selesai tepat pada waktunya. Salawat beserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua selalu mendapat syafa'atNya dan selalu di dalam lindungan Allah SWT amin. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Pengerjaan dan penyelesaian tugas akhir ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Ucapan terima kasih setulus hati kepada orang tua tersayang ayahanda dan ibunda yang telah mencurahkan belayan dan kasih sayang setulus hati, perhatian, do'a, materi dan dukungan untuk menyelesaikan tugas akhir ini. Terima kasih kepada kakanda Syamsu Kamar, Syamsir, Susi Yanti, dinda Fitri Yanti dan keponakanku Nur Azizah yang telah memberikan semangat dan perhatian setulus hati kepada penulis. Tak lupa ucapan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan merupakan penguji II.
4. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc dosen pembimbing yang telah memberikan arahan, motivasi dan membimbing penulis dengan penuh keihlasan dan kesabaran sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc dosen penguji I yang telah membantu memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.

6. Semua dosen-dosen Jurusan Matematika yang memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan tugas akhir ini.
7. Teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2008: Ali Anwar Harahap, Farubahan Siregar, Hafied Primahari, Ise Putra, Mia Fadila, Nofi Maulana, Siti Nursami, Siti Rahma, Sri Damayanti, Vidi Joko Wijayanto dan lainnya yang tak bisa disebutkan satu persatu yang telah banyak memberikan semangat dan motivasi untuk segera menyelesaikan penulisan tugas akhir ini.
8. Saudaraku Fitri, Isma Juliani, Nazuril Ikhwan, Nuriza, Mardiana, Putri Manim, Siska, Suranti, Risda Hayati, Yulia Devega.
9. Semua pihak dan para sahabat yang tidak dapat disebutkan satu parsatu.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih jauh dari sempurna, untuk itu kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Penulis berharap kepada semua pihak yang membaca tugas akhir ini dapat mengambil manfaatnya serta menambah wawasan. Amin

Pekanbaru, 28 Juni 2012

Irawati

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sistem persamaan linear merupakan salah satu bagian dari aljabar linear yang sering dipelajari dalam ilmu matematika. Sistem persamaan linear dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks $Ax = y$ dengan semua entri-entri di dalam A dan y adalah bilangan riil. Matriks merupakan salah satu materi dasar untuk mempelajari ilmu matematika khususnya masalah aljabar. Masalah matriks ini bukan masalah baru bagi mahasiswa, terutama mahasiswa matematika karena sudah sering dipelajari. Operasi matriks merupakan bagian dari aljabar yang sering digunakan dalam aplikasi matematika. Banyak persoalan yang bisa diselesaikan dengan matriks, tidak hanya sistem persamaan linear tapi juga persamaan differensial, numerik, dan lain sebagainya.

Sistem persamaan linear dapat diselesaikan secara langsung dan tidak langsung. Cara langsung sering disebut dengan metode eksak dan dapat dilakukan dengan beberapa metode diantaranya dengan metode invers matriks, Dekomposisi *LU* dan Dekomposisi *Cholescy*. Cara yang tidak langsung disebut dengan metode iterasi seperti Metode Jacobi dan Metode Gauss-Seidel.

Metode-metode tersebut tidak hanya digunakan untuk mendapatkan solusi sistem persamaan linear, tapi juga bisa digunakan untuk menentukan solusi sistem persamaan linear *fuzzy*, yang mana salah satu atau seluruh entri-entri dari sistem persamaan linear ini adalah *fuzzy*. Unsur Y pada sistem persamaan linear *fuzzy* ini dalam bentuk parameter yang berada pada interval tertentu, untuk menyatakan semu tersebut maka digunakan teori himpunan *fuzzy.*

Penyelesaian persamaan linear *fuzzy* sudah dibahas sebelumnya pada jurnal Beta Norita yang berjudul " *Sistem Persamaan Linear fuzzy"* pada tahun 2008, jurnal M. Matinfar dkk yang berjudul " *Solving Linear Fuzzy Sistem of Equations by Using Householder Decomposition Method"* pada tahun 2008 dan jurnal Ke Wang yang berjudul "*Pertubation Analysis for Singular Fuzzy Linear*

System" pada tahun 2012. Berdasarkan penelitian tersebut penulis tertarik meneliti skripsi yang berjudul, "**Penyelesaian Sistem Persamaan Linear *Fuzzy* Menggunakan Dekomposisi *Cholescy*"**. Sistem persamaan linear *fuzzy* akan dikombinasikan dengan Dekomposisi *Cholescy* untuk menentukan solusi dari persamaan linear *fuzzy* tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang disajikan maka rumusan masalah pada penelitian ini yaitu" Bagaimana penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* dengan menggunakan Dekomposisi *Cholescy*?".

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini adalah:

1. Menggunakan *Dekomposisi Cholescy*
2. Sistem persamaan linear *fuzzy* dengan n persamaan dan n variabel
3. Matriks yang digunakan berukuran $n \times n$
4. Menggunakan matriks simetris dan definit positif yang mana semua nilai-nilai eigennya bernilai positif.
5. Sistem persamaan linear dengan fungsi keanggotaan segitiga.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan solusi sistem persamaan linear *fuzzy* dengan menggunakan Dekomposisi *Cholescy*.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan uraian dari rumusan masalah dan tujuan penelitian, maka mamfaat yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

a. Mengembangkan wawasan di bidang matematika khususnya mengenai sistem persamaan linear *fuzzy* dan Dekomposisi *Cholescy*.
b. Mengetahui lebih jauh mengenai sistem persamaan linear *fuzzy* dan Dekomposisi *Cholescy*, serta memberikan kontribusi untuk mempermudah dalam penyelesaian soal-soal yang berhubungan dengan sistem persamaan linear *fuzzy* dengan menggunakan Dekomposisi *Cholescy*.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

BAB I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisi tentang teori-teori yang mendukung dalam penyelesaian bagian pembahasan masalah. Teori-teori tersebut yaitu sistem persamaan linear, matriks, nilai eigen dan vektor eigen, determinan, matriks partisi, dilangan *fuzzy*, sistem persamaan linear *fuzzy*, Dekomposisi *Cholescy.*

Bab III Metodologi Penelitian

Bab ini berisi langkah-langkah yang digunakan untuk penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* dengan menggunakan Dekomposisi *Cholescy*.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisi tentang hasil yang diperoleh dari penyelesaian sistem persamaan linaer *fuzzy* dengan menggunakan Dekomposisi *Cholescy*.

BAB V Penutup

Berisi tentang saran dan kesimpulan dari pembahasan.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan Linear

Sistem persamaan linear memegang peranan penting dalam aljabar linear. Aljabar linear sering dihadapkan pada persoalan mencari penyelesaian suatu sistem persamaan linear. Bentuk umum sistem persamaan linear dapat ditulis sebagai berikut:

$$Ax = y. \tag{2.1}$$

Definisi 2.1 (Marc Lipson, 2006) Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear dengan variabel-variabel yang tidak diketahui. Sistem persamaan linear yang terdiri dari m persamaan $L_1, L_2 \cdots, L_m$ dengan n variabel tidak diketahui $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dapat disusun dalam bentuk standar:

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 & \rightarrow L_1 \\ a_{21}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 & \rightarrow L_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots & \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m & \rightarrow L_m \end{array}$$

dengan a_{ij} dan y_i adalah konstanta. Huruf a_{ij} adalah koefisien dari variabel yang tidak diketahui x_j pada persamaan L_i dan bilangan y_i adalah konstanta dari persamaan L_i.

Sistem persamaan linear dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan } Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

A disebut matriks koefisien yang berukuran $m \times n$ sedangkan X dan Y adalah matriks kolom yang berukuran $n \times 1$. Berikut ini adalah contoh sistem persamaan linear yang terdiri dari tiga persamaan.

Contoh 2.1 :

Diberikan sistem persamaan linear yang terdiri dari m persamaan dan n variabel sebagai berikut:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2$$
$$2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1$$
$$5x_1 + 12x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 3$$

ubahlah ke dalam bentuk persamaan matriks!

Penyelesaian:

Berdasarkan Contoh 2.1 dapat diketahui bahwa $1, 2$ dan 5 merupakan koefisien dari variabel x_1 pada persamaan L_1, L_2 dan L_3 dan 2,1 dan 3 merupakan konstanta dari persamaan $L_1,\ L_2$ dan L_3, dan seterusnya. Bentuk matriks koefisien dari sistem persamaan ini adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 5 & 12 & -7 & 6 \end{bmatrix} \ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ dan } Y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A disebut matriks koefisien yang berukuran 3×4 sedangkan X dan Y adalah matriks kolom yang berukuran 3×1.

Sistem persamaan linear yang mempunyai penyelesaian disebut konsisten dan sebaliknya suatu persamaan linear yang tidak mempunyai penyelesaian disebut tidak konsisten. Sistem persamaan linear dapat mempunyai solusi tunggal dan penyelesaian tidak tunggal. Penyelesaian sistem persamaan linear dapat dilakukan diantaranya dengan metode invers yaitu:

$$X = A^{-1}Y$$

dengan X adalah variabel yang tidak diketahui sedangkan A dan Y merupakan konstanta riil, untuk menetukan invers dari matriks A maka $det\ (A) \neq 0$ dan merupakan matriks kuadrat, yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ (A)$$

dengan $adj\ (A)$ transpos matriks kofaktor A.

2.2 Matriks

Matriks sangat mempunyai peranan penting di dalam matematika, aplikasi matriks ini banyak sekali pada berbagai cabang ilmu pengetahuan seperti aljabar, statistik, numerik, persamaan differensial biasa, fisika dan lain sebagainya. Definisi matriks menurut beberapa sumber buku diantaranya adalah:

Definisi 2.2 (Howard Anton, 2000) Matriks bujursangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.3 (Howard Anton, 2000) Matriks bujursangkar yang semua entri di bawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.4 (Marc lipson, 2006) Transpos dari matriks A ditulis A^T yang merupakan matriks yang diperoleh dengan cara menuliskan kolom-kolom di A secara berurutan sebagai barisnya, dengan kata lain jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks $n \times m$, maka $A^T = [b_{ij}]$ adalah matriks $n \times m$ dengan $a_{ij} = b_{ij}$.

Aplikasi matriks transpos pada matriks yang berukuran 3×3 sebagai berikut:

Contoh 2.2

Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

tentukanlah matriks transpos dari A!

Penyelesaian :

Diketahui:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

maka

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.5 (Howard Anton, 2000) Jika A suatu matriks yang dapat dibalik, A^T juga dapat dibalik $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Bukti :

Diketahui matriks A adalah matriks yang dapat dibalik, sedemikian sehingga matriks A mempunyai invers yaitu A^{-1}, akan ditunjukkan A^T juga dapat dibalik.

$$A^T(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad A^T \qquad \text{(ruas kiri dan kanan dikali } A^T \text{)}$$

$$= I.$$

2.3 Matriks Partisi

Pembentukan matriks partisi yang dibagi ke dalam beberapa matriks yang lebih kecil dapat dilakukan dengan cara menyisipkan garis putus-putus yang membagi anggota-anggota matriks secara harizontal dan vartikal. Sebagai contoh berikut ini partisi yang dapat dibuat untuk matriks S yang berukuran 5×5 dengan cara mempartisi perbaris dan perkolom secara bersamaan yaitu sebagai berikut:

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{bmatrix}.$$

Misalkan matriks S dipartisi dengan manyisipkan garis putus-putus antara baris kedua dan ketiga dan antara kolom ketiga dan keempat, matriks S akan terbagi menjadi empat submatriks yaitu:

$$S=\left[\begin{array}{ccc:cc} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ \hdashline s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} S_{11} & S_{12} \\ \hdashline S_{21} & S_{22} \end{array}\right].$$

Operasi penjumlahan dan pengurangan pada matriks partisi sama dengan operasi penjumlahan dan pengurangan matriks biasa. Berikut ini akan dijelaskan mengenai operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian pada matriks partisi.

2.3.1 Operasi Penjumlahan dan Pengurangan Matriks Partisi

Operasi penjumlahan pada matriks partisi, jika diberikan matriks L berukuran 3×3 dan U berukuran 3×3. Misalkan matriks L dan U dipartisi dengan cara menyisipkan garis putus-putus antara baris kedua dan ketiga kemudian antara kolom kedua dan kolom ketiga pada matriks tersebut, maka matriks L dan U dapat terbagi menjadi empat submatriks yaitu:

$$L=\left[\begin{array}{cc:c} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ \hdashline l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{array}\right]$$

dengan $L_{11}=\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}, L_{12}=\begin{bmatrix} l_{13} \\ l_{23} \end{bmatrix}, L_{21}=[l_{31} \quad l_{32}]$dan $L_{22}=[l_{33}]$

dan matriks

$$U=\left[\begin{array}{cc:c} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ \hdashline u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{array}\right].$$

Operasi penjumlahan dan pengurangan pada matriks partisi U dan L sebagai berikut:

$$L+U=\left[\begin{array}{cc:c} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ \hdashline l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{array}\right]+\left[\begin{array}{cc:c} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ \hdashline u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{array}\right]$$

$$L+U=\left[\begin{array}{c:c} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} l_{13} \\ l_{23} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_{13} \\ u_{23} \end{bmatrix} \\ \hdashline [l_{31} \quad l_{32}]+[u_{31} \quad u_{32}] & [l_{33}]+[u_{33}] \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} L_{11} & L_{12} \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} U_{11} & U_{12} \\ \hline U_{21} & U_{22} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} (L_{11} + U_{11}) & (L_{12} + U_{12}) \\ \hline (L_{12} + U_{12}) & (L_{22} + U_{22}) \end{array}\right].$$

Operasi pengurangan pada matriks partisi sama caranya dengan melakukan operasi pada penjumlahan sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$L - U = \left[\begin{array}{cc|c} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ \hline l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{array}\right] - \left[\begin{array}{cc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ \hline u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{array}\right]$$

$$L - U = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} l_{13} \\ l_{23} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{13} \\ u_{23} \end{bmatrix} \\ \hline [l_{31} \quad l_{32}] - [u_{31} \quad u_{32}] & [l_{33}] - [u_{33}] \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} L_{11} & L_{12} \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c} U_{11} & U_{12} \\ \hline U_{21} & U_{22} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} (L_{11} - U_{11}) & (L_{12} - U_{12}) \\ \hline (L_{21} - U_{21}) & (L_{22} - U_{22}) \end{array}\right].$$

Aplikasi operasi pada matriks partisi ukuran 3×3 sebagai berikut:

Contoh 2.3

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & -5 & 8 \\ 4 & -2 & 9 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & -7 & 9 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

tentukan penjumlah dan pengurangan matriks tersebut!.

Penyelesaian :

Matriks partisi dari A dan B adalah:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 6 \\ 2 & -5 & 8 \\ \hline 4 & -2 & 9 \end{array}\right] \text{ dan } B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ 3 & -7 & 9 \\ \hline -5 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

(i) Penjumlahan

$$A + B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 6 \\ 2 & -5 & 8 \\ \hline 4 & -2 & 9 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 8 \\ 3 & -7 & 9 \\ \hline -5 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & -7\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\\ 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8\\ 9\end{bmatrix} \\ \hdashline [4 \quad -2]+[-5 \quad 0] & [9]+[2] \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} \begin{bmatrix}1+2 & 3+4\\ 2+3 & -5+(-7)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6+8\\ 8+9\end{bmatrix} \\ \hdashline [4+(-5) \quad -2+0] & [0+2] \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 7 & 14\\ 5 & -12 & 17\\ -1 & -\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(ii) Pengurangan

$$A - B = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 6\\ 2 & -5 & 8\\ \hdashline 4 & -2 & 9 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 4 & 8\\ 3 & -7 & 9\\ \hdashline -5 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & -7\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\\ 8\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}8\\ 9\end{bmatrix} \\ \hdashline [4 \quad -2]-[-5 \quad 0] & [9]-[2] \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} \begin{bmatrix}1-2 & 3-4\\ 2-3 & -5-(-7)\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6-8\\ 8-9\end{bmatrix} \\ \hdashline [4-(-5) \quad -2-0] & [0-2] \end{array}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2\\ -1 & 2 & -1\\ 9 & -\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

2.3.2 Operasi Perkalian Matriks Partisi

Operasi perkalian pada matriks partisi L yang berukuran $m \times n$, matriks L dipartisi dengan menyisipkan garis putus-putus antara baris ketiga dan baris keempat kemudian antara kolom ketiga dan kolom keempat. Matriks L akan terbagi menjadi empat submatriks yaitu L_{11}, L_{12}, L_{21} dan L_{22} bentuk matriks L yang dipartisi sebagai berikut:

$$L_{m\times n} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & \cdots & l_{1n}\\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} & \cdots & l_{2n}\\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} & \cdots & l_{3n}\\ \hdashline l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & \cdots & l_{4n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ l_{m1} & l_{m2} & l_{m3} & l_{m4} & \cdots & l_{mn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} L_{11} & L_{12}\\ \hdashline L_{21} & L_{22} \end{array}\right].$$

Ukuran submatriks pada matriks L adalah submatriks L_{11} berukuran $j \times k$, submatriks L_{12} berukuran $j \times (n-k)$, submatriks L_{21} $(m-j) \times k$ dan submatriks L_{22} $(m-j) \times (n-k)$ ditunjukan dalam bentuk sebagai berikut:

$$L_{m\times n} = \left[\begin{array}{c:c} L_{11\, j\times k} & L_{12 j\times(n-k)} \\ \hdashline L_{21(m-j)\times k} & L_{22(m-j)\times(n-k)} \end{array}\right].$$

Cara mempartisi matriks U yang berukuran $p \times q$ sama dengan mempatrisi matriks L yaitu akan dipartisi dengan menyisipkan garis putus-putus antara baris ketiga dan baris keempat kemudian antara kolom ketiga dan kolom keempat. Matriks U akan terbagi menjadi empat submatriks yaitu: U_{11}, U_{12}, U_{21} dan U_{22} bentuk matriks U yang dipartisi sebagai berikut:

$$U_{p\times q} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \cdots & u_{1q} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \cdots & u_{2q} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \cdots & u_{3q} \\ \hdashline u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \cdots & u_{4q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{p1} & u_{p2} & u_{p3} & u_{p4} & \cdots & u_{pq} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} U_{11} & U_{12} \\ \hdashline U_{21} & U_{22} \end{array}\right].$$

Ukuran submatriks pada matriks U adalah submatriks U_{11} berukuran $r \times s$, submatriks U_{12} berukuran $r \times (q-s)$, submatriks U_{21} $(p-r) \times s$ dan submatriks U_{22} $(p-r) \times (q-s)$ ditunjukan dalam bentuk sebagai berikut:

$$U_{p\times q} = \left[\begin{array}{c:c} U_{11\, r\times s} & U_{12\, r\times(q-s)} \\ \hdashline U_{21(p-r)\times s} & U_{22(p-r)\times(q-s)} \end{array}\right].$$

Perkalian untuk kasus matriks khususnya $S = LU$ maka untuk elemen-elemen S_{ij} berlaku:

$$S = LU$$

$$S_{ij} = \sum_{t=1}^{2} L_{it} U_{tj}$$

dengan $i = 1{,}2$ dan $j = 1{,}2$ hal ini berlaku apabila L_{it} dan U_{tj} *comformable* untuk perkalian yaitu jumlah kolom submatriks L_{it} harus sama dengan jumlah baris submatriks U_{tj}, hal ini dapat tercapai jika di dalam membagi partisi kolom L sesuai dengan pembagian partisi baris U.

Bentuk perkalian matriks partisi $S = LU$ sebagai berikut:

$$S = LU$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} L_{11} & L_{12} \\ \hdashline L_{21} & L_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c} U_{11} & U_{12} \\ \hdashline U_{21} & U_{22} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} (L_{11}U_{11} + L_{21}U_{21}) & (L_{11}U_{21} + L_{12}U_{22}) \\ \hdashline (L_{21}U_{11} + L_{22}U_{21}) & (L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}) \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} S_{11} & S_{12} \\ \hdashline S_{21} & S_{22} \end{array}\right].$$

Aplikasi operasi perkalian pada matriks partisi ukuran 3×3 sebagai berikut:

Contoh 2.4 :

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

tentukanlah hasil perkalian matriks A dan B!.

Penyelesaian:

Matriks partisi dari A dan B adalah:

$$A = \left[\begin{array}{cc:c} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ \hdashline 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \text{ dan } B = \left[\begin{array}{cc:c} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 5 \\ \hdashline 4 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

$A_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} A_{21} = [2 \quad 1]$ dan $A_{22} = [2]$

$B_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix},\ B_{12} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix},\ B_{21} = [4 \quad 2]$ dan $B_2 = [5]$.

Perkalian matriks partisi sebagai berikut :

$$C = A \times B = \left[\begin{array}{cc:c} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ \hdashline 2 & 1 & 2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc:c} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 5 \\ \hdashline 4 & 2 & 5 \end{array}\right].$$

Berikut ini adalah perkalian submatriks baris pertama dan kolom pertama:

$$A_{11} \times B_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (4 \times 3) + (3 \times 2) & (4 \times 5) + (3 \times 7) \\ (5 \times 3) + (4 \times 2) & (5 \times 5) + (4 \times 7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & 41 \\ 23 & 53 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} \times B_{21} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} [4 \quad 2]$$

$$= \begin{bmatrix} (2 \times 4) + (2 \times 2) \\ (3 \times 4) + (3 \times 2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}.$$

Berikut ini adalah penjumlahan hasil operasi perkalian submatriks baris pertama dan kolom pertama:

$$(A_{11} \times B_{11}) + (A_{12} \times B_{21}) = \begin{bmatrix} 18 & 41 \\ 23 & 53 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 26 & 45 \\ 35 & 59 \end{bmatrix}.$$

Berikut ini adalah perkalian submatriks baris pertama dan kolom kedua:

$$A_{11} \times B_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (4 \times 6) + (3 \times 5) \\ (5 \times 6) + (4 \times 5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 39 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} \times B_{22} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} [5]$$

$$= \begin{bmatrix} (2 \times 5) \\ (3 \times 5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Berikut ini adalah penjumlahan hasil operasi perkalian submatriks baris pertama dan kolom kedua:

$$(A_{11} \times B_{12}) + (A_{12} \times B_{22}) = \begin{bmatrix} 39 \\ 50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 49 \\ 65 \end{bmatrix}.$$

Berikut ini adalah perkalian submatriks baris kedua dan kolom pertama:

$$A_{21} \times B_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= [(2 \times 3) + (1 \times 2) \;\; (2 \times 5) + (1 \times 7)]$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 17 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} \times B_{21} = [2] \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= [(2 \times 4) \; (2 \times 2)]$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 4 \end{bmatrix}.$$

Berikut ini adalah penjumlahan hasil operasi perkalian submatriks baris kedua dan kolom pertama:

$$(A_{21} \times B_{11}) + (A_{22} \times B_{21}) = [8 \quad 17] + [8 \quad 4]$$
$$= [16 \quad 21].$$

Berikut ini adalah perkalian submatriks baris kedua dan kolom dua:

$$A_{21} \times B_{12} = [2 \quad 1]\begin{bmatrix}6\\5\end{bmatrix}$$
$$= [(2 \times 6) + (1 \times 5)]$$
$$= [17]$$
$$A_{22} \times B_{22} = [2][5]$$
$$= [10].$$

Berikut ini adalah penjumlahan hasil operasi perkalian submatriks baris kedua dan kolom dua:

$$(A_{21} \times B_{12}) + (A_{22} \times B_{22}) = [17] + [10]$$
$$= [27].$$

Sehingga diperoleh hasil dari perkalian matriks partisi sebagai berikut:

$$C = AB$$
$$= \left[\begin{array}{c|c}(A_{11}B_{11} + A_{21}B_{21}) & (A_{11}B_{21} + A_{12}B_{22}) \\ \hline (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}) & (A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22})\end{array}\right].$$
$$= \begin{bmatrix}26 & 45 & 49\\35 & 59 & 65\\16 & 21 & 27\end{bmatrix}.$$

2.4 Determinan

Setiap matriks bujursangkar-n $A = [a_{ij}]$ mempunyai skalar khusus yang disebut $determinan\,A$, dilambangkan dengan $\det(A)$ atau $|A|$. Fungsi determinan pertama kali ditemukan saat dilakukan pengkajian mengenai sistem persamaan linear. Determinan merupakan alat yang sangat penting dalam mengkaji dan memperoleh sifat matriks bujursangkar.

Definisi 2.6 (Haward Anton, 1998) Misalkan A adalah matriks $n \times n$, fungsi determinan dinyatakan dengan det, dan didefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlah hasil kali elementer bertanda dari A.

Menurut Haward Anton (1998) sifat-sifat determinan matriks antara lain:

1. Jika A sebarang matriks $n \times n$ yang mengandung satu baris bilangan $nol(0)$, maka $= 0$.
2. Jika A sebarang matriks segitiga $n \times n$, maka $\det(A)$ adalah hasil kali dari entri-entri pada diagonal utama yaitu $\det(A) = a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$.
3. Jika A adalah sebarang matriks $n \times n$, maka $\det(A) = \det(A^t)$.
4. Jika terdapat matriks A dan B berukuran $n \times n$, maka $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
5. Sebuah matriks matriks A berukuran $n \times n$ dapat dibalik maka, $\det(A) \neq 0$.

Metode yang digunakan untuk determinan matriks diantaranya yaitu: metode ekspansi kofaktor.

Definisi 2.7 (Haward Anton, 1998) Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka minor entri a_{ij} dinyatakan dengan M_{ij} didefinisikan menjadi determinan submatriks yang tetap setelah baris ke-i dan ke-j dicoret dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan dengan C_{ij} yang dinyatakan dengan kofaktor dari entri a_{ij}.

Kofaktor dan minor elemen a_{ij} hanya berbeda pada tanda yakni $C_{ij} = \pm M_{ij}$. secara matematis determinan matriks A dengan ordo $n \times n$ dapat dihitung dengan ekspansi Laplace atau kofaktor sebagai berikut:

$$\det(A) = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j}\left|M_{ij}\right|$$

atau

$$|A| = \sum_{i=0}^{n} a_{ij}\,C_{ij}.$$

Berikut adalah aplikasi determinan pada matriks A ukuran 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

diperoleh:

$$C_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, C_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, C_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Nilai C_{ij} yang lain dapat dilakukan dengan cara yang sama. Determinan dari matriks $A_{3\times3}$ dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama adalah:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{12}a_{33} - a_{13a_{32}}) + \\ &\quad a_{13}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \end{aligned}$$

2.5 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Nilai eigen dan vektor eigen merupakan masalah matriks kedua yang sering dijumpai, yang pertama adalah solusi sistem persamaan linear. Banyak penerapan yang mengharuskan untuk menentukan suatu matriks bukan nol X sedemikian sehingga:

$$AX = \lambda X$$

dengan A adalah matriks $n \times n$ yang diketahui dan λ adalah skalar.

Definisi 2.8 (Marc Lipson, 2006) Jika A adalah matriks $n \times n$, suatu matriks bukan nol X yang berukuran $n \times 1$ sedemikian sehingga $AX = \lambda X$ dinamakan vektor eigen bagi A sedangkan λ dinamakan nilai eigen bagi A yang terkait dengan X, yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - A) = 0. \tag{2.2}$$

Aplikasi penetuan nilai eigen pada matriks ukuran 3×3 sebagai berikut :

Contoh 2.5

Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tentukanlah nilai eigen matriks A!.

Penyelesaian :

Berdasarkan persamaan(2.2) maka:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2 + 2(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

jadi nilai eigen matriks A adalah $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 3$.

2.6 Matriks Definit Positif Simetris

Berikut ini akan dijelaskan tentang suatu matriks definit positif dan matriks simetris yang saling berkaitan satu sama lainnya.

Definisi 2.9 (Haward Anton, 2000) Matriks A disebut matriks simetris jika $A^T = A$, demikian juga $A = [a_{ij}]$ dikatakan simetris jika elemen-elemen simetrisnya sama yaitu jika setiap $a_{ij} = a_{ji}$ yang mana untuk $i = 1,2,\cdots,n$ dan $j = 1,2,\cdots,n$.

Definisi 2.10 (Steven J.Leon, 2001) Matriks simetris A yang berukuran $n \times n$ disebut matriks definit positif jika nilai dari $x^T Ax > 0$ untuk $x \neq 0$ dalam R^n.

Teorema 2.11 (Steven J.Leon, 2001) Misalkan A adalah matriks simetris yang berukuran $n \times n$ maka A adalah definit positif jika dan hanya jika semua nilai eigennya adalah positif.

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan A adalah matriks definit positif dan λ adalah sebarang nilai eigen dari A jika x adalah vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ, maka untuk $x \neq 0$ berlaku:

$$x^T Ax = x^T x = \lambda\, x^T x = \lambda\, \|x\|^2 > 0$$

karena $\|x\|^2 > 0$ maka $\lambda > 0$, jadi λ positif.

($\Leftarrow$) Misalkan nilai eigen dari A positif, maka akan ditunjukkan $x^T Ax > 0$ untuk $x \neq 0$, karena $x \neq 0$ untuk memperoleh vektor normal x adalah:

$y \frac{x}{\|x\|}$, dengan $\|y\| = 1$ sehingga $y^T Ay \geq \lambda_n > 0$ dengan λ_n adalah nilai eigen dari A yang terkecil.

Jadi,

$$y^T Ay = \frac{x^T}{\|x\|} A \frac{x}{\|x\|} = \frac{x^T Ax}{\|x\|^2} > 0$$

dengan mengalikan $\|x\|^2$ diperoleh $x^T Ax > 0$, berarti A adalah definit positif. □

Aplikasi matriks definit positif simetris pada matriks ukuran 3×3 sebagai berikut:

Contoh 2.6

Diberikan matriks simetris sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

tentukan apakah matriks tersebut simetris definit positif ?

Penyelesaian:

Berdasarkan persamaan (2.2) maka:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 6 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 6 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 6 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(\lambda - 6)^3 - 8 - 8 - 4(\lambda - 6) - 4(\lambda - 6) - 4(\lambda - 6) = 0$$

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 108\lambda - 232 - 12\lambda + 72 = 0$$

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 96\lambda - 160 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 4)(\lambda - 10) = 0$$

jadi nilai eigen matriks A adalah $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$ dan $\lambda_3 = 10$. Nilai eigen dari matriks A bernilai positif jadi, A merupakan matriks simetris definit positif. Aplikasi matriks juga terdapat pada bilangan yang semu atau biasa disebut dengan bilangan *fuzzy*.

2.7 Bilangan *Fuzzy*

Fuzzy dapat diartikan kabur atau semu. Himpunan *fuzzy* pertama kali dibahas oleh Lotfi A. Zadeh 1965. Himpunan *fuzzy* merupakan kumpulan dari entri-entri dengan suatu rangkaian tingkat keanggotaan. Himpunan ini dicirikan dengan fungsi keanggotaan yang menegaskan suatu tingkatan (*grade*) keanggotaan yang bernilai 0 dan 1, dari penjelasan tersebut dapat dikatakan bahwa nilai keanggotaan pada *fuzzy* terletak pada interval [0,1].

Definisi 2.12 (Widodo, 2009) Misalkan X adalah suatu himpunan semesta, kemudian himpunan bagian *fuzzy* U dari X adalah himpunan bagian dari X yang keanggotaannya didefinisikan melalui fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\widetilde{U}}(x) : X \to [0,1]$$

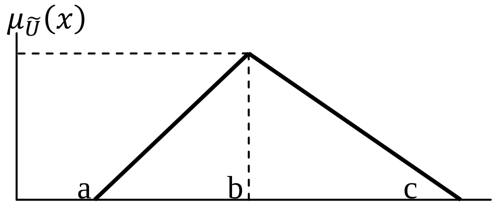
Berdasarkan definisi tersebut maka himpunan $fuzzy\ \widetilde{U}$ dalam himpunan semesta x, ditulis dalam bentuk:

$$\widetilde{U} = \{(x, \mu_{\widetilde{U}}(x)) | x \in X\}$$

dengan $(x, \mu_{\widetilde{U}}(x))$ menyatakan elemen x yang mempunyai derajat keanggotaan $\mu_{\widetilde{U}}(x)$, pada penulisan ini menggunakan fungsi keanggotaan segitiga. Fungsi keanggotaan segitiga ditandai dengan tiga parameter yang akan menentukan koordinat x dari tiga sudut. Persamaan untuk fungsi keanggotaan segitiga ini sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{U}}(x) = \mu_{\tilde{U}}(x,a,b,c) = \begin{cases} (x-a)/(b-a), & a \leq x \leq b \\ (c-x)/(c-b), & b \leq x \leq c \\ 0 \quad\quad\quad\quad\quad\quad, & lainnya \end{cases} \quad (2.3)$$

Kurva yang dibentuk oleh fungsi keanggotaan segitiga merupakan gabungan antara dua garis linear, untuk lebih jelas berikut adalah grafik fungsi keanggotaan segitiga:



Gambar 2.1 Grafik Fungsi Keanggotaan Segitiga $\mu_{\tilde{U}}(x,a,b,c)$.

Menurut Beta Norita (2008) menjelaskan tentang definisi bilangan *fuzzy* u di dalam R sebagai pasangan fungsi $(\underline{u},\overline{u})$ yang memenuhi sifat sebagai berikut:

1. Fungsi $\overline{u}$ monoton naik, terbatas dan kontinu kiri pada [0,1]
2. Fungsi $\overline{u}$ monoton turun, terbatas dan kontinu kanan pada [0,1]
3. $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r)$ untuk setiap r dalam [0,1].

Himpunan bilangan-bilangan *fuzzy* dinyatakan dengan F, untuk setiap bilangan *fuzzy* $u \in F$ ditulis dalam bentuk parameter $u = (\underline{u},\overline{u})$. Menurut P. Mansouri dan B. Asady (2011) operasi aljabar bilangan *fuzzy* untuk setiap $u = \underline{u}(r),\ \overline{u}(r)$ dan $y = \underline{y}(r),\ \overline{y}(r) \in F$ dan bilangan riil k didefinisikan sebagai berikut:

1. $u + y = (\underline{u}(r) + \underline{y}(r), \overline{u}(r) + \overline{y}(r))$
2. $u = y$ jika dan hanya jika $\underline{u} = \underline{y}$ dan $\overline{u} = \overline{y}$
3. $ku = k\underline{u}, k\overline{u}$ untuk $k \geq 0$
4. $ku = k\overline{u}, k\underline{u}$ untuk $k < 0$

Suatu sistem persamaan linear yang memuat bilangan *fuzzy* dapat difaktorisasikan menggunakan Dekomposisi *Cholescy*.

2.8 Dekomposisi *Cholescy*

Metode *Cholescy* hanya bisa diaplikasikan pada matriks simetris dan definit positif. D. N. Sonawane (2011) menjelaskan matriks simetris riil disebut definit positif jika nilai eigennya adalah positif. Matriks nonsingular $A_{n\times n}$ dapat difaktorkan menjadi $L^T L$ yang merupakan definit positif. Jika A definit positif maka dari itu A dapat di faktorkan dengan:

$$A = LL^T \tag{2.4}$$

dengan L adalah matriks segitiga bawah, jika jumlah dari elemen diagonal dari matriks L positif yang disebut Dekomposisi *Cholescy*. Persamaan (2.4) dalam bentuk matriks berukuran $n = 3$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}.$$

Entri-entri dari persamaan (2.4) dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut:

$$l_{ki} = \frac{a_{ki} \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{jk}}{l_{ii}} \quad \text{untuk } i = 1,2,\cdots,k-1 \tag{2.5}$$

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l^2{}_{kj}}\ . \tag{2.6}$$

Dekomposisi *Cholescy* merupakan salah satu metode eksak yang digunakan untuk mendapatkan solusi dari sistem persamaan linear. Solusi dari sistem persamaan diperoleh dari faktorisasi *Cholescy* terhadap matriks koefisien sistem persamaan. Berikut ini adalah contoh pemecahan sistem persamaan linear menggunakan Dekomposisi *Cholescy.*

Contoh 2.7

Diberikan sistem persamaan linear sebagai berikut:

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$$
$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 2$$
$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3$$

tentukanlah solusi persamaan tersebut menggunakan Dekomposisi *Cholescy*!

Penyelesaian:

Langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut:

1. Berdasarkan persamaan (2.4) maka:

$$A = LL^T$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

2. Menentukan elemen-elemen l_{ki} pada matriks L dengan

$$l_{ki} = \frac{a_{ki} \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{jk}}{l_{ii}}$$

untuk $i = 1$ dan $k = 2$ maka:

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1$$

untuk $i = 1, 2$ dan $k = 3$ maka:

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{21} l_{31}}{l_{22}} = \frac{2 - (1)(1)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. Menentukan elemen-elemen l_{kk} pada matriks L dengan

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l^2{}_{kj}}$$

untuk $i = 1, 2, 3$ dan $k = 1, 2, 3$ maka:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l^2{}_{21}} = \sqrt{4 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l^2{}_{31} - l^2{}_{32}} = \sqrt{4 - (1)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4 - 1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

sehingga diperoleh matriks $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ dan $L^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

jadi, faktorisasi *Cholescy* dari sistem persamaan adalah:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

selanjutnya $LY = B$ maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}, \; y_2 = \frac{3}{2\sqrt{3}} \text{ dan } y_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

selanjutnya $L^T X = Y$ maka diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh solusi dari sistem persamaan linear sebagai berikut:

$$x_1 = -\frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{4} \text{ dan } x_3 = \frac{3}{4}.$$

BAB III

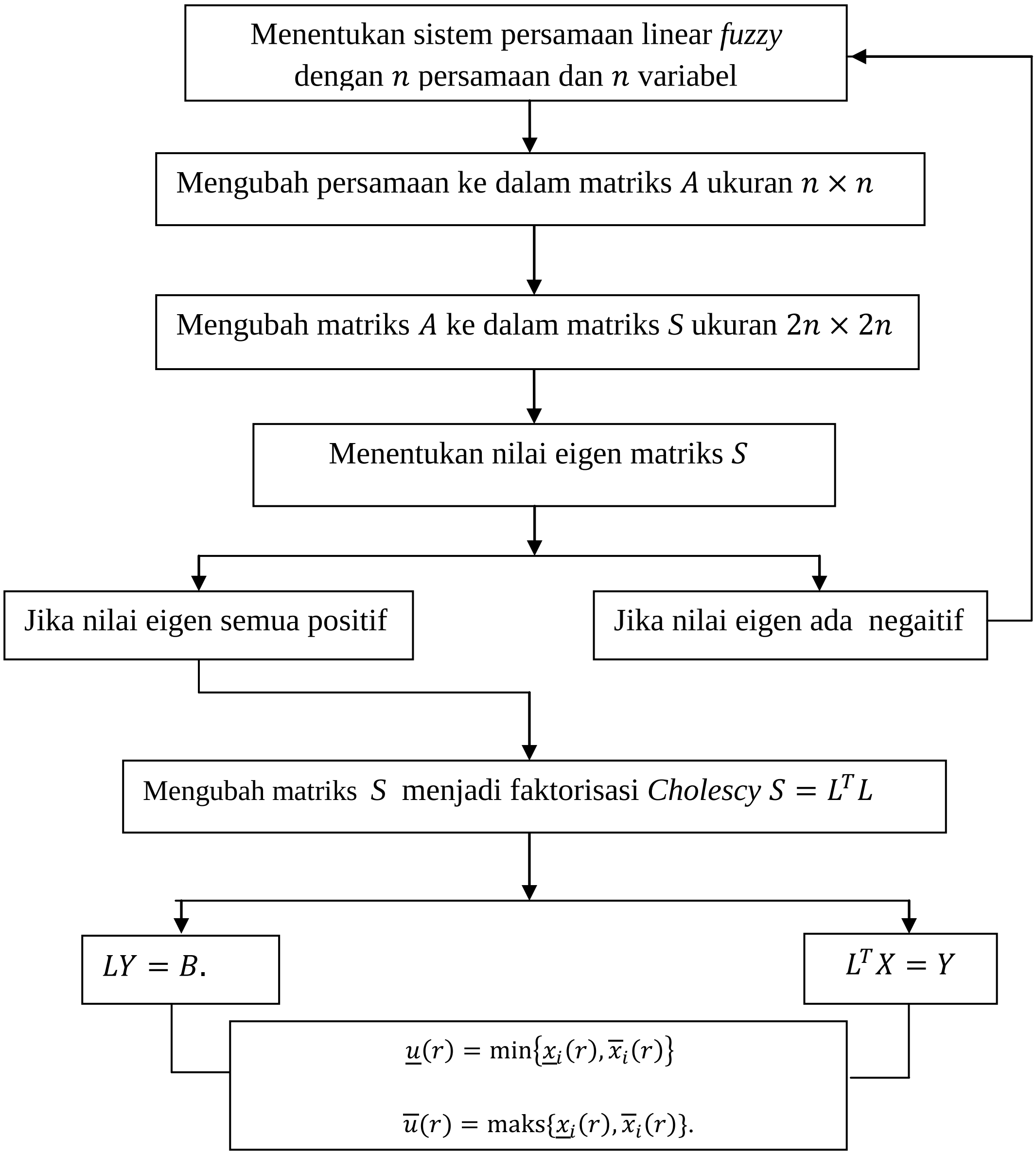
METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah menggunakan metode kajian pustaka. Pengumpulan data dan informasi serta materi yang bersangkutan dengan penulisan skripsi ini terdapat di ruang perpustakaan seperti: buku, jurnal, dokumentasi dan media internet.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Menetukan sistem persamaan linear *fuzzy* dengan n persamaan dan n variabel.
2. Mengubah persamaan ke dalam bentuk matriks A yang berukuran $n \times n$.
3. Selanjutnya mengubah matriks A yang berukuran $n \times n$ ke dalam bentuk matriks S yang berukuran $2n \times 2n$ dengan entri-entri dari S dapat ditentukan dengan:
   - Jika $a_{ij} \geq 0$ maka $b_{ij} = a_{ij}$ dan $b_{i+n,j+n} = a_{ij}$.
   - Jika $a_{ij} < 0$ maka $b_{i,j+n} = -\, a_{ij}$ dan $b_{i+n,j} = -a_{ij}$.
   - $b_{ij} = 0$ untuk yang lain.
4. Menentukan nilai eigen matriks S jika nilai eigen negatif maka kembali ke langkah pertama jika nilai eigen semuanya positif lanjutkan ke langkah berikutnya.
5. Membentuk matriks $S = LL^T$.
6. Menentukan nilai vektor B dengan rumus $LY = B$ dan vektor X dengan rumus $L^T X = B$.
7. Selanjutnya menentukan solusi sistem persamaan linear *fuzzy* dengan rumus $\underline{u}(r) = \min\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\}$ dan $\overline{u}(r) = \text{maks}\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\}$.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam melakukan penelitian ini dapat digambarkan dalam *flowchart* sebagai berikut:



Gambar 3.1 *Flowchart* Metodologi Penelitian

BAB IV

PEMBAHASAN DAN HASIL

4.1 Sistem Persamaan Linear *Fuzzy*

Sistem persamaan linear *fuzzy* merupakan sebuah sistem persamaan linear yang berparameter *fuzzy* atau semu yang berada pada interval tertentu. Bentuk umum dari sistem persamaan linear *fuzzy* diantaranya sebagai berikut:

$$A\tilde{x} = \tilde{y} \tag{4.1}$$

model sistem persamaan linear *fuzzy* dijelaskan sebagai berikut :

$$\begin{array}{l} a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \cdots + a_{1n}\tilde{x}_n = \tilde{y}_1 \\ a_{21}\tilde{x}_1 + a_{22}\tilde{x}_2 + \cdots + a_{2n}\tilde{x}_n = \tilde{y}_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}\tilde{x}_1 + a_{m2}\tilde{x}_2 + \cdots + a_{mn}\tilde{x}_n = \tilde{y}_n \end{array}$$

dengan a_{ij} adalah konstanta dan $\tilde{x}_j$ variabel yang belum diketahui dan $\tilde{y}_i$ adalah *fuzzy*. Bentuk persamaan (4.1) dapat ditulis manjadi bentuk persamaan matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r)\right) \\ \left(\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r)\right) \\ \vdots \\ \left(\underline{x}_n(r), \overline{x}_n(r)\right) \end{bmatrix} \text{ dan}$$

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\underline{y}_1(r), \overline{y}_1(r)\right) \\ \left(\underline{y}_2(r), \overline{y}_2(r)\right) \\ \vdots \\ \left(\underline{y}_n(r), \overline{y}_n(r)\right) \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

dengan matriks koefisien $A = (a_{ij})$, untuk $i, j = 1,2,\cdots,n, \tilde{x}$ adalah vektor bilangan *fuzzy* berukuran $n \times 1$ dengan $\tilde{x}_i = \left(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\right), r = [0,1]$ dan $\tilde{y}_i = \left(\underline{y}_i(r), \overline{y}_i(r)\right)$ untuk $i = 1,2,\cdots,n$ adalah vektor bilangan *fuzzy* yang berukuran $n \times 1$. Menurut M. Matinfar dkk (2008) menjelaskan tentang definisi solusi sistem persamaan linear *fuzzy* sebagai berikut:

Definisi 4.1 (M. Matinfar dkk, 2008) Terdapat $X = \{(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r), 1 \leq i \leq n)\}$ adalah solusi dari $SX = Y$ dengan bilangan *fuzzy* $U = \{\underline{u}_i(r), \overline{u}_i(r)), 1 \leq i \leq n\}$ adalah:

$$\underline{u}(r) = \min\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r), \underline{x}_i(1), \overline{x}_i(1)\},$$

$$\overline{u}(r) = \text{maks}\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r), \underline{x}_i(1), \overline{x}_i(1)\}$$

disebut solusi *fuzzy* dari $SX = Y$ jika $\left(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\right)$ adalah bilangan *fuzzy* untuk setiap $1 \leq i \leq n$ kemudian $\widetilde{U}$ disebut solusi *fuzzy* kuat (*strong fuzzy solution*) jika $\overline{u}_i = \overline{x}_i$, $\underline{u}_i = \underline{x}_i$ maka selain dari itu $\widetilde{U}$ adalah *fuzzy* lemah (*weak fuzzy solution*).

Langkah awal yang harus dilakukan untuk mencari solusi persamaan (4.1) adalah mengubah matriks koefisien A yang berukuran $n \times n$ menjadi suatu matriks yang berukuran $2n \times 2n$ yang diasumsikan menjadi matriks S dengan ruas kanan merupakan vektor kolom$\left(\underline{y}_1, \cdots, \underline{y}_n, \overline{y}_1, \cdots, \overline{y}_n\right)^T$.

Definisi 4.2 (T. Allahviranloo dkk, 2008) Vektor bilangan *fuzzy* $(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ dengan diberikan $\tilde{x}_i = \left(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\right)$ untuk $i = 1,2, \cdots, n$ dan $r = [0,1]$ disebut penyelesaian dari sistem persamaan linear *fuzzy* (4.1) jika:

$$\begin{aligned} \underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} &= \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}x_j} = \underline{y}_i \\ \overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} &= \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}x_j} = \overline{y}_i. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Persamaan (4.3) dengan $\left(\underline{x}_1, \cdots, \underline{x}_n, \overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n\right)^T$ untuk $i = 1,2, \cdots, n$ adalah variabel yang tidak diketahui dan $\left(\underline{y}_1, \cdots, \underline{y}_n, \overline{y}_1, \cdots, \overline{y}_n\right)^T$ adalah ruas kanan sehingga diperoleh persamaan linear *fuzzy* baru. Menurut M. Matinfar dkk (2008) sistem persamaan linear *fuzzy* baru dijelaskan sebagai berikut:

$$s_{11}\underline{x}_1 + \cdots + s_{1n}\underline{x}_n + s_{1,n+1}\overline{x}_1 + \cdots + s_{1,2n}\overline{x}_n = \underline{y}_1$$
$$\vdots$$
$$s_{n,1}\underline{x}_1 + \cdots + s_{n,n}\underline{x}_n + s_{n,n+1}\overline{x}_1 + \cdots + s_{n,2n}\overline{x}_n = \underline{y}_n \quad (4.3)$$
$$s_{n+1,1}\underline{x}_1 + \cdots + s_{n+1,n}\underline{x}_n + s_{n+1,n+1}\overline{x}_1 + \cdots + s_{n+1,2n}\overline{x}_n = \overline{y}_1$$
$$\vdots$$
$$s_{2n,1}\underline{x}_1 + \cdots + s_{2n,n}\underline{x}_n + s_{2n,n+1}\overline{x}_1 + \cdots + s_{2n,2n}\overline{x}_n = \overline{y}_n.$$

Persamaan (4.2) matriks koefisien berbentuk $A = (a_{ij})$ untuk $i, j = 1,2,\cdots,n$ sedangkan pada persamaan (4.3) matriks koefisien berbentuk $S = (s_{ij})$ untuk $i, j = 1,2,\cdots,n$, maka untuk menentukan entri-entri s_{ij} ditentukan dengan ketentuan sebagai berikut:

- Jika $a_{ij} \geq 0$ maka $b_{ij} = a_{ij}$ dan $b_{i+n,j+n} = a_{ij}$.
- Jika $a_{ij} < 0$ maka $s_{i,j+n} = -a_{ij}$ dan $b_{i+n,j} = -a_{ij}$.
- $b_{ij} = 0$ untuk yang lain.

Persamaan (4.3) dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks sebagai berikut:

$$S\tilde{X} = \tilde{Y} \quad (4.4)$$

atau

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{X} \\ \overline{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y} \\ \overline{Y} \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}, \ \underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1(r) \\ \vdots \\ \underline{x}_n(r) \end{bmatrix}, \quad \overline{X} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1(r) \\ \vdots \\ \overline{x}_n(r) \end{bmatrix} \ \underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{y}_1(r) \\ \vdots \\ \underline{y}_n(r) \end{bmatrix}, \quad \text{dan}$$

$$\overline{Y} = \begin{bmatrix} \overline{y}_1(r) \\ \vdots \\ \overline{y}_n(r) \end{bmatrix}.$$

Menurut T. Allahviranloo dkk (2008) menjelaskan bahwa secara tidak lansung:

$$S = \begin{bmatrix} B_1 \geq 0 & B_2 \geq 0 \\ B_2 \geq 0 & B_1 \geq 0 \end{bmatrix}$$

dengan $b_{ij} \geq 0$ untuk $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$. Entri-entri B_1 bernilai positif dari A dan B_1 adalah nilai mutlak dari entri-entri yang bernilai negatif dari A sehingga $A = B_1 - B_2$.

Berikut ini adalah contoh mengubah sistem persamaan linear *fuzzy* ke dalam matriks koefisien A. Matriks A yang berukuran 2×2 akan diubah menjadi matriks koefisien yang berukuran $2n \times 2n$ sehingga didapat sistem persamaan linear *fuzzy* baru.

Contoh 4.1

Diberikan sistem persamaan linear *fuzzy* berikut:

$$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = \tilde{v}_1$$

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \tilde{v}_2$$

tentukanlah sistem persamaan linear *fuzzy* baru!

Penyelesaian:

Langkah-langkah dalam penyelesaian sebagai berikut:

1. Mengubah sistem persamaan linear *fuzzy* ke dalam bentuk matriks A seperti persamaan (4.2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_1 \end{bmatrix}.$$

2. Mengubah matriks A menjadi matriks S berdasarkan persamaan(4.3)

$a_{ij} \geq 0$ maka $b_{ij} = a_{ij}$ dan $b_{i+n,j+n} = a_{ij}$

Nilai b untuk $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ berturut-turut dan $n = 3$ diperoleh sebagai berikut:

$$a_{11} = 1, b_{11} = 1 \text{ dan } b_{33} = 1$$

$$a_{21} = 1, b_{21} = 1 \text{ dan } b_{43} = 1$$

$$a_{22} = 1, b_{22} = 1 \text{ dan } b_{44} = 1$$

$a_{ij} < 0$ maka $b_{i,j+n} = -a_{ij}$ dan $b_{i+n,j} = -a_{ij}$

Nilai b untuk $i = 1$, $j = 2$ berturut-turut dan $n = 3$ diperoleh sebagai berikut:

$$a_{12} = -1, b_{14} = 1 \text{ dan } b_{32} = 1$$

$b_{ij} = 0$ untuk yang lain

Nilai b untuk $i = 1, 2, \cdots, 4$, $j = 1, 2, \cdots, 4$ dan $n = 3$ diperoleh sebagai berikut:

$$b_{12} = 0, b_{23} = 0, b_{31} = 0, b_{41} = 0, b_{13} = 0, b_{24} = 0, b_{34} = 0 \text{ dan } b_{42} = 0$$

sehingga diperoleh matriks S sebagai berikut:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sistem persamaan linear *fuzzy* baru diperoleh dengan melakukan operasi perkalian pada persamaan matriks (4.4) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \overline{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y} \\ \overline{Y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{v}_2 \end{bmatrix}$$

jadi persamaan linear *fuzzy* baru didapat sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 \qquad\qquad\quad + \overline{x}_2 &= \underline{v}_1 \\ \underline{x}_1 + \underline{x}_2 \qquad\qquad\quad &= \underline{v}_2 \\ \underline{x}_2 + \overline{x}_1 \qquad &= \overline{v}_1 \\ \overline{x}_1 + \overline{x}_2 &= \overline{v}_2. \end{aligned}$$

Contoh selanjutnya matriks koefisien A yang berukuran 3×3 akan diubah menjadi matriks koefisien yang berukuran $2n \times 2n$ sehingga didapat sistem persamaan linear *fuzzy* baru.

Contoh 4.2

Diberikan sistem persamaan linear *fuzzy* sebagai berkut:

$$\begin{aligned} 4\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 &= v_1 \\ -\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 &= v_2 \\ 2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + 3\tilde{x}_3 &= v_3 \end{aligned}$$

tentukanlah sistem persamaan linear *fuzzy* baru!

Penyelesaian:

Langkah-langkah dalam penyelesaian sebagai berikut:

1. Mengubah sistem persamaan linear *fuzzy* ke dalam bentuk matriks A seperti persamaan (4.2)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{bmatrix}.$$

2. Mengubah matriks A menjadi matriks S berdasarkan persamaan (4.3).

   $a_{ij} \geq 0$ maka $b_{ij} = a_{ij}$ dan $b_{i+n,j+n} = a_{ij}$.

Nilai b untuk $i = 1, 2,$ $j = 1, 2$ dan 3 berturut-turut dan $n = 3$ diperoleh sebagai berikut:

$a_{11} = 4,$ $b_{11} = 4$ dan $b_{44} = 4$

$a_{12} = 1,$ $b_{12} = 1$ dan $b_{45} = 1$

$a_{22} = 3,$ $b_{22} = 3$ dan $b_{55} = 3$

$a_{23} = 1,$ $b_{23} = 1$ dan $b_{56} = 1.$

Nilai b untuk $i = 3$ $j = 1, 2$ dan 3 berturut-turut dan $n = 3$ diperoleh sebagai berikut:

$a_{31} = 2,$ $b_{31} = 2$ dan $b_{64} = 2$

$a_{32} = 1,$ $b_{32} = 1$ dan $b_{65} = 1$

$a_{33} = 3,$ $b_{33} = 3$ dan $b_{66} = 3.$

$a_{ij} < 0$ maka $b_{i,j+n} = -\, a_{ij}$ dan $b_{i+n,j} = -a_{ij}$

Nilai b untuk $i = 1, 2,$ $j = 1, 3$ berturut-turut dan $n = 3$ diperoleh sebagai berikut:

$a_{13} = -1, b_{16} = 1$dan $b_{43} = 1$

$a_{21} = -1, b_{24} = 1$dan $b_{51} = 1.$

$b_{ij} = 0$ untuk yang lain

Nilai b untuk $i = 1, 2, \cdots, 6,$ $j = 1, 2, \cdots, 6$ dan $n = 3$ diperoleh sebagai berikut:

$b_{12} = 0,$ $b_{13} = 0,$ $b_{14} = 0, b_{15} = 0, b_{21} = 0, b_{25} = 0, b_{26} = 0,$

$b_{34} = 0$ $, b_{35} = 0, b_{36} = 0, b_{41} = 0, b_{42} = 0,$ $b_{45} = 0, b_{52} = 0$

$b_{53} = 0, b_{54} = 0, b_{61} = 0, b_{62} = 0$ dan $b_{63} = 0.$

sehingga diperoleh matriks S sebagai berikut:

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sistem persamaan linear *fuzzy* baru diperoleh dengan melakukan operasi perkalian pada persamaan matriks (4.4) sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \overline{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y} \\ \overline{Y} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \underline{v}_3 \\ \overline{v}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{v}_3 \end{bmatrix}$$

jadi persamaan linear *fuzzy* baru didapat sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} 4\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + \overline{x}_3 = \underline{v}_1 \\ 3\underline{x}_2 + \underline{x}_3 + \overline{x}_1 = \underline{v}_2 \\ 2\,\underline{x}_1 + \underline{x}_2 + 3\underline{x}_3 = \overline{v}_1 \\ \underline{x}_3 + 4\overline{x}_1 + \overline{x}_2 = \overline{v}_2 \\ \underline{x}_1 + 3\overline{x}_2 + \overline{x}_3 = \overline{v}_2 \\ 2\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + 3\overline{x}_3 = \overline{v}_3. \end{array}$$

Sistem persamaan linear *fuzzy* dapat diselesaikan dengan mengunakan Dekomposisi *Cholescy*. Dekomposisi ini merupakan faktorisasi dari sebuah matriks yang berukuran $n \times n$, yang mempunyai ketentuan tersendiri.

4.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Linear *Fuzzy* Menggunakan Dekomposisi *Cholescy*

Solusi sistem persamaan linear *fuzzy* mempunyai solusi tunggal jika matriks koefisien S nonsingular dan matriks koefisien dari A pada persamaan (4.1) adalah matriks persegi dan nonsingular. Menurut Beta Norita (2008) teorema yang menyatakan singularitas dari matriks S sebagai berikut:

Teorema 4.2 (Beta Norita, 2008) Diberikan Matriks $S = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix}$ adalah matriks koefisien pada persamaan(4.3) dikatakan nonsingular jika dan hanya jika matriks $A = B_1 - B_2$ dan $B_1 + B_2$ keduanya nonsingular dengan kata lain $|B_1 - B_2| \neq 0$ dan $|B_1 + B_2| \neq 0$. .

Bukti :

Diketahui matriks S nonsingular yang mana $\det(S) \neq 0$, akan dibuktikan bahwa $A = B_1 - B_2$ dan $B_1 + B_2$ adalah nonsingular. Misalkan S matriks nonsingular sebagai berikut:

$$S = \left[\begin{array}{ccc:ccc} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} & b_{1,n+1} & \cdots & b_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{nn} & b_{n,n+1} & \cdots & b_{n,2n} \\ \hdashline b_{n+1,1} & \cdots & b_{n+1,n} & b_{n+1,n+1} & \cdots & b_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,1} & \cdots & b_{2n,n} & b_{2n,n+1} & \cdots & b_{2n,2n} \end{array}\right]$$

dengan menambahkan baris ke-$(n+i)$ kepada baris ke- i yang mana $1 \leq i \leq n$ dari matriks S sehingga diperoleh matriks hasil penjumlahan yang dimisalkan dengan Wsebagai berikut:

$$W = \left[\begin{array}{ccc:ccc} b_{1,1} + b_{n+1,1} & \cdots & b_{1,n} + b_{n+1,n} & b_{1,n+1} + b_{n+1,n+1} & \cdots & b_{1,2n} + b_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} + b_{2n,1} & \cdots & b_{nn} + b_{2n,n} & b_{n,n+1} + b_{2n,n+1} & \cdots & b_{n,2n} + b_{2n,2n} \\ \hdashline b_{n+1.1} & \cdots & b_{n+1,n} & b_{n+1,n+1} & \cdots & b_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,1} & \cdots & b_{2n,n} & b_{2n,n+1} & \cdots & b_{2n,2n} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c:c} \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n+1,1} & \cdots & b_{n+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,1} & \cdots & b_{2n,n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{1,n+1} & \cdots & b_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,n+1} & \cdots & b_{n,2n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n+1,n+1} & \cdots & b_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,n+1} & \cdots & b_{2n,2n} \end{bmatrix} \\ \hdashline \begin{bmatrix} b_{n+1.1} & \cdots & b_{n+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,1} & \cdots & b_{2n,n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{n+1,n+1} & \cdots & b_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,n+1} & \cdots & b_{2n,2n} \end{bmatrix} \end{array}\right].$$

Penjabaran operasi ini bisa disederhanakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$W = \left[\begin{array}{c:c} B_1 + B_2 & B_1 + B_2 \\ \hdashline B_2 & B_1 \end{array}\right].$$

Selanjutnya akan dilakukan pengurangan pada kolom ke-$(n+j)$ dengan kolom ke-j yang mana$1 \leq i \leq n$ dari W matriks sehingga diperoleh matriks hasil pengurangan yang dimisalkan dengan Z sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} b_{1,1}+b_{n+1.1} & \cdots & b_{1,n}+b_{n+1,n} & (b_{1,n+1}+b_{n+1,n+1})-(b_{1,1}+b_{n+1.1}) & \cdots & (b_{1,2n}+b_{n+1,2n})-(b_{1,n}+b_{n+1,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1}+b_{2n,1} & \cdots & b_{nn}+b_{2n,n} & (b_{n,n+1}+b_{2n,n+1})-(b_{n,1}+b_{2n,1}) & \cdots & (b_{n,2n}+b_{2n,2n})-(b_{nn}+b_{2n,n}) \\ \hdashline b_{n+1.1} & \cdots & b_{n+1,n} & (b_{n+1,n+1})-(b_{n+1.1}) & \cdots & (b_{n+1,2n})-(b_{n+1,n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,1} & \cdots & b_{2n,n} & (b_{2n,n+1})-(b_{2n,1}) & \cdots & (b_{2n,2n})-(b_{2n,n}) \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c:c} \begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n+1.1} & \cdots & b_{n+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,1} & \cdots & b_{2n,n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{1,n+1} & \cdots & b_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,n+1} & \cdots & b_{n,2n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n+1,n+1} & \cdots & b_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,n+1} & \cdots & b_{2n,2n} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n+1.1} & \cdots & b_{n+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,1} & \cdots & b_{2n,n} \end{bmatrix} \right) \\ \hdashline \begin{bmatrix} b_{n+1.1} & \cdots & b_{n+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,1} & \cdots & b_{2n,n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{n+1,n+1} & \cdots & b_{n+1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,n+1} & \cdots & b_{2n,2n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{n+1.1} & \cdots & b_{n+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2n,1} & \cdots & b_{2n,n} \end{bmatrix} \end{array}\right].$$

Penjabaran dari operasi pengurangan tersebut dapat disederhanakan sebagai beirkut:

$$Z = \left[\begin{array}{c:c} B_1 + B_2 & 0 \\ \hdashline B_2 & B_1 - B_2 \end{array}\right]$$

jaka

$$\det(S) \ = \ {B_1}^2 - {B_2}^2$$

$$\begin{aligned} \det(W) &= (B_1 + B_2)\ B_1 - (\ B_1 + B_2)B_2 \\ &= \ {B_1}^2 + B_1B_2 - {B_2}^2 + B_1B_2 \\ &= \ {B_1}^2 - {B_2}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(Z) &= (B_1 + B_2\ )(B_1 - B_2) \\ &= \ {B_1}^2 - {B_2}^2. \end{aligned}$$

Berdasarkan penjabaran determinan dari S, W dan Z maka diperoleh:

$$\det(S) = \det(W) = \det(Z) = |B_1 + B_2||\ B_1 - B_2|$$

karena $\det(S) \neq 0$, $|B_1 + B_2||\ B_1 - B_2| \neq 0$, $|B_1 - B_2| \neq 0$ dan $|B_1 + B_2| \neq 0$ maka terbukti bahwa S matriks nonsingular. ❑

Solusi sistem persamaan linear *fuzzy* diperoleh dengan terlebih dahulu mengubah persamaan $A\tilde{x} = \tilde{y}$ ke dalam bentuk sistem persamaan linear *fuzzy* baru yaitu:

$S\tilde{X} = \tilde{Y}$

dengan menggunakan Dekomposis *Cholescy* maka matriks koefisien dari sistem persamaan linear *fuzzy* dapat difaktorisasikan ke dalam bentuk berikut:

$$S = LL^T \tag{4.5}$$

sehingga solusi dari sistem persamaan dapat diselesaikan dengan rumus sebagai berikut:

$$LY = B \tag{4.6}$$

dan

$$L^T X = Y. \tag{4.7}$$

Aplikasi Dekomposisi *Cholescy* hanya berlaku untuk matriks simetris definit posistif riil. Disebut definit posistif jika semua nilai eigen dari matriks tersebut bernilai positif. Berdasarkan ketentuan dari Dekomposisi *Cholescy* pada saat melakukan proses penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* akan melibatkan determinan. Deteminan digunakan untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks koefisien sistem persamaan linear *fuzzy* yang baru. Matriks koefisien dari sistem persamaan linear baru dapat dipartisi ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$S = LL^T$$

$$\left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_2 & B_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L_{11} & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} L^T{}_{11} & L^T{}_{21} \\ \hline 0 & L^T{}_{22} \end{array}\right]$$

$$B_1 = L_{11} L^T{}_{11}$$

$$B_2 = L_{11} L^T{}_{21}$$

$$B_2 = L_{21} L^T{}_{11}$$

$$B_1 = L_{21} L^T{}_{21} + L_{22} L^T{}_{22}$$

dengan menggunakan operasi perkalian pada matriks partisi maka entri-entri pada matriks L dan matriks L^T dapat ditentukan.

Selanjutnya langkah-langkah yang dilakukan untuk mendapatkan penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* $S\tilde{X} = \tilde{Y}$ dengan menggunakan Dekomposisi *Cholescy* sebagai berikut:

1. Mengubah sisitem persamaan linear *fuzzy* dengan n persamaan dan n variabel ke dalam matriks koefisien A.

2. Mengubah matriks koefisien A berukuran $n \times n$ ke dalam matriks koefisien baru dengan ukuran $2n \times 2n$ yaitu matriks S.
3. Menentukan nilai eigen dari matriks koefisien S jika nilai eigen bernilai positif maka lanjutkan ke langkah selanjutnya, jika nilai eigen ada bernilai negatif maka kembali ke langkah pertama.
4. Melakukan faktorisasi pada matriks S menjadi matriks L dan matriks L^T.
5. Menghitung vektor B dengan rumusan $LB = Y$.
6. Menghitung vektor X dengan rumusan $L^T X = B$.
7. Menentukan nilai $\overline{u}(r) = \text{maks}\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\}$ dan $\underline{u}(r) = \min\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\}$.

Berikut ini contoh untuk menyelesaikan sistem persamaan linear *fuzzy* berukuran 2 × 2 dengan metode Dekomposisi *Cholescy*.

Contoh 4.3

Diberikan sistem persamaan linear *fuzzy* sebagai berikut:

$$6\tilde{x}_1 - 5\tilde{x}_2 = (18 + 6r, 26 - 2r)$$
$$-5\tilde{x}_1 + 6\tilde{x}_2 = (12 + 3r, 11 + 4r)$$

tentukanlah solusi sistem persamaan tersebut menggunakan Dekomposisi *Cholescy*!

Penyelesaian:

Sistem persamaan linear *fuzzy* ini dapat diubah ke dalam persamaan matriks sebagai berikut:

$$A\tilde{X} = \tilde{Y}$$
$$\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 + 6r, 26 - 2r \\ 12 + 3r, 11 + 4r \end{bmatrix}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \tilde{X} \begin{bmatrix} \underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r) \\ \underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r) \end{bmatrix} \text{ dan } \tilde{Y} = \begin{bmatrix} 18 + 6r, 26 - 2r \\ 12 + 3r, 11 + 4r \end{bmatrix}$$

sistem pesamaan ini mempunyai paramater *fuzzy* oleh karena itu matriks koefisien A yang berukuran $n \times n$ diubah menjadi matriks koefisien baru yang berukuran

$2n \times 2n$ dengan $n = 2$ yang diasumsikan dengan matriks koefisien S. Entri-entri dari matriks S dapat ditentukan berdasarkan rumus berikut:

1. Mengubah matriks A menjadi matriks S berdasarkan persamaan (4.3).
   $a_{ij} \geq 0$ maka $b_{ij} = a_{ij}$ dan $b_{i+n,j+n} = a_{ij}$

Nilai b untuk $i = 1, 2,\ j = 1, 2$ berturut-turut dan $n = 3$ diperoleh sebagai berikut:

$$a_{11} = 6,\ b_{11} = 6 \text{ dan } b_{33} = 6$$
$$a_{22} = 6, b_{22} = 6 \text{ dan } b_{44} = 6$$

$a_{ij} < 0$ maka $b_{i,j+n} = -\,a_{ij}$ dan $b_{i+n,j} = -a_{ij}$

Nilai b untuk $i = 1, 2,\ j = 1, 2$ berturut-turut dan $n = 3$ diperoleh sebagai berikut:

$$a_{12} = -5, b_{14} = 5 \text{ dan } b_{32} = 5$$
$$a_{21} = -5, b_{23} = 5 \text{ dan } b_{41} = 5$$

$b_{ij} = 0$ untuk yang lain

Nilai b untuk $i = 1, 2, \cdots, 4,\ j = 1, 2, \cdots, 4$ diperoleh sebagai berikut:

$$b_{12} = 0, b_{13} = 0, b_{21} = 0, b_{24} = 0, b_{31} = 0, b_{34} = 0, b_{42} = 0, \text{ dan } b_{43} = 0.$$

Berdasarkan entri-entri yang didapat maka diperoleh matriks koefisien baru sebagai berikut:

$$S = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Matriks S dapat diubah menjadi bentuk persamaan matriks berdasarkan rumus (4.4) sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 + 6r \\ 12 + 3r \\ 26 - 2r \\ 11 + 4r \end{bmatrix}$$

dengan

$$S = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} \text{dan } \tilde{Y} = \begin{bmatrix} 18 + 6r \\ 12 + 3r \\ 26 - 2r \\ 11 + 4r \end{bmatrix}$$

maka dengan melakukan operasi perkalian terhadap persamaan matriks diperoleh persamaan linear *fuzzy* baru yaitu:

$$\begin{aligned} 6\underline{x}_1 \qquad\qquad + 5\overline{x}_2 &= 18 + 6r \\ 6\underline{x}_2 + 5\overline{x}_1 \qquad &= 12 + 3r \\ 5\underline{x}_2 + 6\overline{x}_1 \qquad &= 26 - 2r \\ 5\underline{x}_1 \qquad\qquad + 6\overline{x}_2 &= 11 + 4r. \end{aligned}$$

Penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* yang baru ini dapat dilakukan dengan Dekomposisi *Cholescy*. Metriks koefisien yang diperoleh dari sistem persamaan baru tersebut yaitu matriks S. Matriks ini merupakan matriks simetris, maka terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa matriks S adalah definit positif simetris dengan menggunakan persamaan (2.2) maka akan ditentukan nilai eigen sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - S) = 0$$

$$\det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} (\lambda - 6) & 0 & 0 & -5 \\ 0 & (\lambda - 6) & -5 & 0 \\ 0 & -5 & (\lambda - 6) & 0 \\ -5 & 0 & 0 & (\lambda - 6) \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$((\lambda - 6)^2 - 25)((\lambda - 6)^2 - 25) = 0$$

$$\lambda^4 - 24\lambda^3 + 166\lambda^2 - 264\lambda + 121 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 11)(\lambda - 1)(\lambda - 11) = 0$$

jadi nilai eigen dari matriks S adalah $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 11$, $\lambda_3 = 1$ dan $\lambda_4 = 11$, , karena semua nilai eigen matriks S positif maka matriks S adalah matriks definit positif. Selanjutnya akan ditentukan Dekomposisi *Cholescy* matriks S dalam bentuk matriks partisi sebagai berikut ini:

$$S = LL^T$$

$$\left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_2 & B_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L_{11} & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} L_{11} & L_{21} \\ \hline 0 & L_{22} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ \hline l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ \hline 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{array}\right]$$

dengan melakukan operasi perkalian terhadap matriks L dengan matriks L^T maka elemen-elemen dari matriks tersebut ditentukan dengan cara berikut:

$$L_{11} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l^2{}_{11} & l_{11}l_{21} \\ l_{21}l_{11} & l^2{}_{21} + l^2{}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{b_{11}} = \sqrt{6} = 2.4495$$

$$l_{21} = {}^{b_{11}}/_{l_{11}} = {}^{0}/_{\sqrt{6}} = 0$$

$$l_{22} = \sqrt{b_{22} - l^2{}_{21}} = \sqrt{6 - (0)^2} = 2.4495$$

jadi diperoleh matriks L_{11} sebagai berikut:

$$L_{11} = \begin{bmatrix} 2.4495 & 0 \\ 0 & 2.4495 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan ditentukan matriks L_{21} dengan operasi sebagai berikut:

$$L_{21} = \begin{bmatrix} l_{31} & l_{32} \\ l_{41} & l_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_{31}l_{11} & l_{31}l_{21} + l_{22}l_{32} \\ l_{41}l_{11} & l_{41}l_{21} + l_{42}l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$l_{31} = {}^{b_{31}}\!/_{l_{11}} = {}^{0}\!/_{\sqrt{6}} = 0$$

$$l_{41} = {}^{b_{41}}\!/_{l_{11}} = {}^{5}\!/_{\sqrt{6}} = 2.0412$$

$$l_{32} = {}^{(b_{32} - l_{31}l_{21})}\!\Big/_{l_{22}} = {}^{\left(5 - (0)(0)\right)}\!\Big/_{\sqrt{6}} = 2.0412$$

$$l_{42} = {}^{(b_{42} - l_{41}l_{21})}\!\Big/_{l_{22}} = {}^{\left(0 - (2.0412)(0)\right)}\!\Big/_{\sqrt{6}} = 0$$

jadi diperoleh matriks L_{21} sebagai berikut:

$$L_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 2.0412 \\ 2.0412 & 0 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan ditentukan matriks L_{21} dengan operasi sebagai berikut:

$$L_{22} = \begin{bmatrix} l_{31} & l_{32} \\ l_{41} & l_{42} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{31} & l_{32} \\ l_{41} & l_{42} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{33} & 0 \\ l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{33} & l_{43} \\ 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l^2{}_{31} + l_{32}l_{41} & l_{31}l_{32} + l_{32}l_{42} \\ l_{31}l_{41} + l_{42}l_{41} & l_{32}l_{41} + l^2{}_{42} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l^2{}_{33} & l_{33}l_{43} \\ l_{43}l_{33} & l^2{}_{43} + l^2{}_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l^2{}_{31} + l_{32}l_{41} + l^2{}_{33} & l_{31}l_{32} + l_{32}l_{42} + l_{33}l_{43} \\ l_{31}l_{41} + l_{42}l_{41} + l_{43}l_{33} & l_{32}l_{41} + l^2{}_{42} + l^2{}_{43} + l^2{}_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$l_{33} = \sqrt{b_{33} - l^2{}_{31} - l_{32}l_{41}}$$

$$= \sqrt{6 - (0)^2(2.0412)^2} = 1.3540$$

$$l_{43} = {}^{(b_{43} - l_{31}l_{32} - l_{32}l_{42})}\!\Big/_{l_{33}}$$

$$= {}^{\left(0 - (0)(2.0412) - (2.0412)(0)\right)}\!\Big/_{\sqrt{6}} = 0$$

$$l_{44} = \sqrt{b_{44} - l_{32}l_{41} - l^2{}_{42} - l^2{}_{43}}$$

$$= \sqrt{6 - (2.0412)^2 - (0)^2 - (0)^2} = 1.3540$$

jadi diperoleh matriks L_{21} sebagai berikut:

$$L_{22} = \begin{bmatrix} 1.3540 & 0 \\ 0 & 1.3540 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan elemen dari matriks partisi L yang didapat maka diperoleh matriks L dan L^T sebagai berikut:

$$L = \begin{bmatrix} 2.4495 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4495 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0412 & 1.3540 & 0 \\ 2.0412 & 0 & 0 & 1.3540 \end{bmatrix}$$

$$L^T = \begin{bmatrix} 2.4495 & 0 & 0 & 2.0412 \\ 0 & 2.4495 & 2.0412 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3540 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3540 \end{bmatrix}.$$

Langkah selanjutnya untuk menentukan solusi sistem persamaan linear *fuzzy* adalah dengan menghitung vektor B dengan menggunakan rumus berikut:

$$LB = Y$$

$$\begin{bmatrix} 2.4495 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4495 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0412 & 1.3540 & 0 \\ 2.0412 & 0 & 0 & 1.3540 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 + 6r \\ 12 + 3r \\ 26 - 2r \\ 11 + 4r \end{bmatrix}$$

dari operasi perkalian matriks diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned} 2.4495\underline{b}_1 &= 18 + 6r \\ 2.4495\underline{b}_2 &= 12 + 3r \\ 2.0412\underline{b}_2 + 1.3540\overline{b}_1 &= 26 - 2r \\ 2.0412\underline{b}_2 + 1.3540\overline{b}_2 &= 11 + 4r \end{aligned}$$

sehingga diperoleh nilai dari vektor B sebagai berikut:

$$\underline{b}_1 = {(18 + 6r)}/{2.4495} = 7.3484 + 2.4495$$

$$\underline{b}_2 = {(12 + 3r)}/{2.4495} = 4.8989 + 1.2247r$$

$$\overline{b}_1 = {(16.0000 - 4.4994r)} \Big/ {1.3540} = 11.8168 - 3.3344r$$

$$\overline{b}_2 = {(-3.9963 - 0.9998r)} \Big/ {1.354} = -2.9539 - 0,7385r.$$

Langkah selanjutnya untuk menentukan solusi dari sistem persamaan *fuzzy* ini adalah menghitung nilai variabel X dengan operasi matriks berikut:

$$L^T X = B$$

$$\begin{bmatrix} 2.4495 & 0 & 0 & 2.0412 \\ 0 & 2.4495 & 2.0412 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3540 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.3540 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.3484 + 2.4495r \\ 4.8989 + 1.2247r \\ 11.8168 - 3.3344r \\ -2.9539 - 0.7385r \end{bmatrix}$$

dari operasi perkalian matriks diperoleh persamaan berikut:

$$\begin{aligned} 2.4495\underline{x}_1 + 2.0412\overline{x}_2 &= 7.3484 + 2.4495r \\ 2.4495\underline{x}_2 + 2.0412\overline{x}_1 &= 4.8989 + 1.2247r \\ 1.3540\overline{x}_1 &= 11.8168 - 3.3344r \\ 1.3540\overline{x}_2 &= -2.9539 - 0.7385r. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai dari variabel $\tilde{x}$ sebagai berikut:

$$\overline{x}_2 = {(-2.9539 - 0.7385r)} \Big/ {1.3540} = -2.1816 - 0.5455r$$

$$\overline{x}_1 = {(11.8168 - 3.3344r)} \Big/ {1.3540} = 8.7274 - 2.4545r$$

$$\underline{x}_2 = {(-12.9153 + 6.2349r)} \Big/ {2.4495} = -5.2726 + 2.5454r$$

$$\underline{x}_1 = {(11.8000 - 3.0201r)} \Big/ {2.4495} = 4.8173 + 1.4545r$$

jadi, penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* diperoleh sebagai berikut:

$$\tilde{x}_1 = \left(\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r)\right) = (4.8173 + 1.4545r, 8.7274 - 2.4545r\ )$$
$$\tilde{x}_2 = \left(\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r)\right) = (-5.2726 + 2.5455r, -2.1816 - 0.5455r).$$

Berdasarkan definisi 4.1.1 solusi dari sistem persamaan linear *fuzzy* adalah:

$$\begin{aligned} \underline{u}_1(r) &= \min\left\{\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r), \underline{x}_1(1), \overline{x}_1(1)\ \right\} \\ &= \min = \{4.8173 + 1.4545r, 6.272, 8.7274 - 2.4545r, 6.272\} \\ &= 4.8173 + 1.4545r \end{aligned}$$

$\underline{u}_1(r) = \underline{x}_1(r)$

$\overline{u}_1(r) = \text{maks}\{\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r), \underline{x}_1(1), \overline{x}_1(1)\}$

$= \text{maks}\{4.8173 + 1.4545r, 6.272, 8.7274 - 2.4545r, 6.272\}$
$= 8.7274 - 2.4545r$

$\overline{u}_1(r) = \overline{x}_1(r)$

$\underline{u}_2(r) = \min\{\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r), \underline{x}_2(1), \overline{x}_1(1)\}$

$= \min\{-5.2726 + 2.5454r, -2.727, -2.1816 - 0.5455r, -2.727\}$

$= -5.2726 + 2.5454r$

$\underline{u}_2(r) = \underline{x}_2(r)$

$\overline{u}_2(r) = \text{maks}\{\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r), \underline{x}_2(1), \overline{x}_1(1)\}$

$= \text{maks}\{-5.2726 + 2.5454r, -2.727, -2.1816 - 0.5455r, -2.727\}$
$= -2.1816 - 0.5455r$

$\overline{u}_2(r) = \overline{x}_2(r)$.

Berdasarkan penjabaran solusi sistem persamaan linear *fuuzy* maka diperoleh:

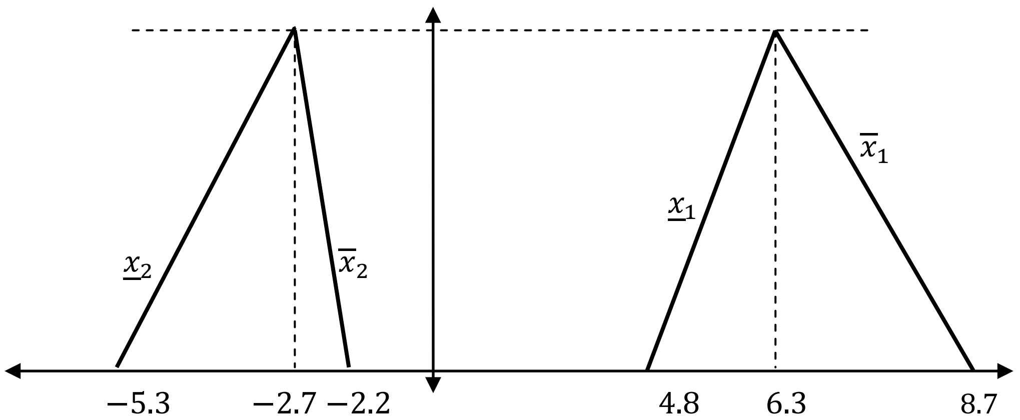
$\tilde{u}_1 = (4.8173 + 1.4545r, 8.7274 - 2.4545r)$

$\tilde{u}_2 = (-5.2726 + 2.5454r, -2.1816 - 0.5455r)$.

Berdasarkan persamaan (2.3) maka penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* tersebut dapat dinyatakan dengan bilangan *fuzzy* segitiga sebagai berikut:

$\tilde{x}_1 = (4.8173, 6.272, 8.7274)$ dan $\tilde{x}_2 = (-5.2726, -2.727, -2.1816)$.

Grafik untuk sistem persamaan linear *fuzzy* ini dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 4.1 Grafik Fungsi Keanggotaan Segitiga dari $\tilde{x}_1$, dan $\tilde{x}_2$

Berdasarkan hasil dari penyelesaian diperoleh bahwa solusi dari sistem persamaan linear *fuzzy* tersebut adalah tunggal karena matriks koefisien S dan matriks persegi koefisien A nonsingular. Solusi dari penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* ini kuat, karena hasil dari penyelesaian dipeoleh $\tilde{u}_1 = \tilde{x}_1$dan $\tilde{u}_2 = \tilde{x}_2$.

Berikut ini contoh untuk menyelesaikan sistem persamaan linear *fuzzy* berukuran 3×3 dengan metode Dekomposisi *Cholescy*.

Contoh 4.4

Diberikan sistem persamaan linear *fuzzy* sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
6\tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 \qquad &= (10 + 9r, 25 - 6r) \\
-2\tilde{x}_1 + 4\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3 &= (-17 + 4r, -5 - 8r) \\
-2\tilde{x}_2 + 6\tilde{x}_3 &= (7 + 8r, 26 - 11r)
\end{aligned}
$$

tentukanlah solusi sistem persamaan tersebut menggunakan Dekomposisi *Cholescy*!

Penyelesaian:

Sistem persamaan linear *fuzzy* ini dapat diubah ke dalam bentuk persamaan matriks berdasarkan rumus (4.4) sehingga diperoleh:

$$
\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 9r, 25 - 6r \\ -17 + 4r, -5 - 8r \\ 7 + 8r, 26 - 11r \end{bmatrix}
$$

dengan

$$
A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r) \\ \underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r) \\ \underline{x}_3(r), \overline{x}_3(r) \end{bmatrix} \text{dan } \tilde{y} = \begin{bmatrix} 10 + 9r, 25 - 6r \\ -17 + 4r, -5 - 8r \\ 7 + 8r, 26 - 11r \end{bmatrix}
$$

sistem pesamaan ini mempunyai paramater *fuzzy* oleh karena itu maka matriks koefisien A yang berukuran $n \times n$ diubah menjadi matriks koefisien baru yang berukuran $2n \times 2n$ dengan $n = 3$ yang diasumsikan dengan matriks koefisien S. Entri-entri dari matriks S dapat ditentukan berdasarkan rumusan berikut:

1. Mengubah matriks A menjadi matriks S berdasarkan persamaan (4.3). $a_{ij} \geq 0$ maka $b_{ij} = a_{ij}$ dan $b_{i+n,j+n} = a_{ij}$

Nilai b untuk $i = 1, \cdots, 3,\ \ j = 1 \cdots, 3$ berturut-turut dan $n = 3$ diperoleh sebagai berikut:

$$a_{11} = 6, b_{11} = 6 \text{ dan } b_{44} = 6$$
$$a_{22} = 4, b_{22} = 4 \text{ dan } b_{55} = 4$$
$$a_{33} = 6, b_{33} = 6 \text{ dan } b_{66} = 6$$

$a_{ij} < 0$ maka $b_{i,j+n} = -a_{ij}$ dan $b_{i+n,j} = -a_{ij}$

Nilai b untuk $i = 1, \cdots, 3,\ j = 1, \cdots, 3$ berturut-turut dan $n = 3$ diperoleh sebagai berikut:

$$a_{12} = -2, b_{15} = 2 \text{ dan } b_{42} = 2$$
$$a_{21} = -2, b_{24} = 2 \text{ dan } b_{51} = 2$$
$$a_{23} = -2, b_{26} = 2 \text{ dan } b_{53} = 2$$
$$a_{32} = -2, b_{35} = 2 \text{ dan } b_{62} = 2$$

$b_{ij} = 0$ untuk yang lain

Nilai b untuk $i = 1, 2, \cdots, 6,\ j = 1, 2, \cdots, 6$ diperoleh sebagai berikut:

$$b_{12} = 0, b_{13} = 0, b_{14} = 0,\ b_{16} = 0, b_{21} = 0, b_{23} = 0, b_{25} = 0, b_{31} = 0,$$

$$b_{32} = 0, b_{34} = 0, b_{36} = 0, b_{41} = 0, b_{43} = 0, b_{45} = 0, b_{46} = 0, b_{52} = 0,$$

$$b_{54} = 0, b_{56} = 0, b_{61} = 0, b_{63} = 0, b_{64} = 0 \text{ dan } b_{65} = 0$$

Berdasarkan entri-entri yang dicari maka diperoleh matriks koefisien baru sebagai berikut:

$$S = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Matriks S dapat diubah menjadi bentuk persamaan matriks berdasarkan rumus (4.4) sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 9r \\ -17 + 4r \\ 7 + 8r \\ 25 - 6r \\ -5 - 8r \\ 26 - 11r \end{bmatrix}.$$

$$S = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{bmatrix} \text{dan } \tilde{Y} = \begin{bmatrix} 10 + 9r \\ -17 + 4r \\ 7 + 8r \\ 25 - 6r \\ -5 - 8r \\ 26 - 11r \end{bmatrix}$$

dengan dengan melakukan operasi perkalian pada matriks S diperoleh sistem persamaan linear baru yaitu:

$$\begin{aligned} 6\underline{x}_1 + 2\overline{x}_2 &= 10 + 9r \\ 4\underline{x}_2 + 2\overline{x}_1 + 2\overline{x}_3 &= -17 + 4r \\ 6\,\underline{x}_3 + 2\overline{x}_2 &= 7 + 8r \\ 2\underline{x}_2 + 6\overline{x}_1 &= 25 - 6r \\ 2\underline{x}_1 + 2\underline{x}_3 + 4\overline{x}_2 &= -5 - 8r \\ 2\underline{x}_2 + 6\overline{x}_3 &= 26 - 11r. \end{aligned}$$

Penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* yang baru ini dapat dilakukan dengan Dekomposisi *Cholescy*. Matriks koefisien yang diperoleh dari sistem persamaan baru tersebut yaitu matriks S. Matriks ini merupakan matriks simetris, maka terlebih dahulu akan ditunjukkan bahwa matriks S adalah definit positif simetris dengan menggunakan persamaan (2.2) maka akan ditentukan nilai eigen sebagai berikut:

$$\det(\lambda I - S) = 0$$

$$\det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det = \left(\begin{bmatrix} (\lambda-6) & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & (\lambda-4) & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & (\lambda-6) & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & (\lambda-6) & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & (\lambda-4) & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-6) \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$0 = (\lambda-6)^4(\lambda-4)^2 - 8(\lambda-6)^2 - 8(\lambda-6)^2$$

$$0 = \lambda^6 + 48\lambda^4 + 144\lambda^2 - 16\lambda^5 - 768\lambda^3 + 2304\lambda + 64\lambda^4$$
$$-3072\lambda^2 + 9216$$

$$0 = \lambda^6 - 16\lambda^5 + 48\lambda^4 - 768\lambda^3 - 3072\lambda^2 - 2304\lambda + 9216$$

$$0 = (\lambda-8)(\lambda-6)(\lambda-2)(\lambda-8)(\lambda-6)(\lambda-2)$$

jadi nilai eigen dari matriks S adalah $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 8$, $\lambda_5 = 6$, dan $\lambda_6 = 2$, karena semua nilai eigen matriks S positif maka matriks S adalah matriks definit positif. Selanjutnya akan ditentukan Dekomposisi *Cholescy* dalam bentuk matriks partisi sebagi berikut ini:

$$S = LL^T$$

$$\left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_2 & B_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} L_{11} & 0 \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} l_{11} & l_{21} \\ \hline 0 & l_{22} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & 0 & 0 \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} & 0 \\ l_{61} & l_{62} & l_{63} & l_{64} & l_{65} & l_{66} \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc|ccc} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} & l_{51} & l_{61} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} & l_{52} & l_{62} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} & l_{53} & l_{63} \\ \hline 0 & 0 & 0 & l_{44} & l_{54} & l_{64} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_{55} & l_{65} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_{66} \end{array}\right].$$

Berikut ini akan dilakukan operasi perkalian terhadap matriks L dengan matriks L^T yaitu:

$$L_{11} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l^2{}_{11} & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & l^2{}_{21} + l^2{}_{22} & l_{21}l_{31} + l_{32}l_{22} \\ l_{11}l_{31} & l_{21}l_{31} + l_{32}l_{22} & l^2{}_{31} + l^2{}_{32} + l^2{}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} = \sqrt{b_{11}} = \sqrt{6} = 2.4495$$

$$l_{21} = \frac{b_{21}}{l_{11}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$l_{31} = \frac{b_{31}}{l_{11}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$l_{22} = \sqrt{b_{22} - l^2{}_{21}} = \sqrt{4} = 2$$

$$l_{32} = \frac{b_{32} - l_{21}l_{31}}{l_{22}} = \frac{0 - (0)(0)}{2} = 0$$

$$l_{33} = \sqrt{b_{33} - l^2{}_{31} - l^2{}_{32}} = \sqrt{6 - (0)^2(0)^2} = 2.4495$$

maka diperoleh matriks L_{11} sebagai berikut:

$$L_{11} = \begin{bmatrix} 2.4495 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 2.4495 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan ditentukan matriks L_{21} dengan cara berikut:

$$L_{21} = \begin{bmatrix} l_{41} & l_{42} & l_{43} \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} \\ l_{61} & l_{62} & l_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_{41}l_{11} & l_{41}l_{21} + l_{42}l_{22} & l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32} + l_{43}l_{33} \\ l_{51}l_{11} & l_{51}l_{21} + l_{52}l_{22} & l_{51}l_{31} + l_{52}l_{22} + l_{53}l_{33} \\ l_{61}l_{11} & l_{61}l_{31} + l_{62}l_{22} & l_{61}l_{31} + l_{62}l_{32} + l_{63}l_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$l_{41} = \frac{b_{41}}{l_{11}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0$$

$$l_{51} = \frac{b_{51}}{l_{11}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = 0.8165$$

$$l_{61} = \frac{b_{61}}{l_{11}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0$$

$$l_{42} = \frac{b_{42} - l_{41}l_{21}}{l_{22}} = \frac{2 - (0)(0)}{2} = 1$$

$$l_{52} = \frac{b_{52} - l_{41}l_{21}}{l_{22}} = \frac{0 - (0)(0)}{2} = 0$$

$$l_{62} = \frac{b_{62} - l_{61}l_{31}}{l_{22}} = \frac{2 - (0)(0)}{2} = 1$$

$$l_{43} = \frac{b_{43} - l_{41}l_{31} - l_{42}l_{32}}{l_{33}} = \frac{0 - (0)(0) - (1)(0)}{\sqrt{6}} = 0$$

$$l_{53} = \frac{b_{53} - l_{51}l_{31} - l_{52}l_{22}}{l_{33}} = \frac{2 - (0{,}1865)(0) - (0)(2)}{\sqrt{6}} = 0.8165$$

$$l_{63} = \frac{b_{63} - l_{61}l_{31} - l_{62}l_{32}}{l_{33}} = \frac{0 - (0)(0) - (1)(0)}{\sqrt{6}} = 0$$

Maka didapat matriks L_{21} sebagai berikut:

$$L_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 \\ 0.8165 & 0 & 0.8165 \\ 0 & 1.0000 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matriks L_{22} akan didapatkan dengan cara berikut:

$$L_{22} = \begin{bmatrix} l_{41} & l_{42} & l_{43} \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} \\ l_{61} & l_{62} & l_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{41} & l_{51} & l_{61} \\ l_{42} & l_{52} & l_{62} \\ l_{43} & l_{53} & l_{63} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_{44} & 0 & 0 \\ l_{54} & l_{55} & 0 \\ l_{64} & l_{65} & l_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{44} & l_{54} & l_{64} \\ 0 & l_{55} & l_{65} \\ 0 & 0 & l_{66} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l^2{}_{41} + l^2{}_{42} + l^2{}_{43} + l^2{}_{44} & l_{41}l_{51} + l_{42}l_{52} + l_{43}l_{53}l_{44}l_{54} & l_{41}l_{61} + l_{42}l_{62} + l_{43}l_{63} + l_{44}l_{64} \\ l_{41}l_{51} + l_{42}l_{52} + l_{43}l_{53} + l_{44}l_{54} & l^2{}_{51} + l^2{}_{52} + l^2{}_{53} + l^2{}_{44} + l^2{}_{55} & l_{51}l_{61} + l_{52}l_{62} + l_{53}l_{63} + l_{54}l_{64} + l_{55}l_{65} \\ l_{41}l_{61} + l_{62}l_{42} + l_{63}l_{43} + l_{44}l_{64} & l_{51}l_{61} + l_{52}l_{62} + l_{53}l_{63} + l_{54}l_{64} + l_{55}l_{65} & l^2{}_{61} + l^2{}_{62} + l^2{}_{63} + l^2{}_{64} + l^2{}_{65} + l^2{}_{66} \end{bmatrix}$$

$$l_{44} = \sqrt{b_{44} - l^2{}_{41} - l^2{}_{42} - l^2{}_{43}}$$
$$= \sqrt{6 - (0)^2 - (1)^2 - (0)^2} = \sqrt{5} = 2.2361$$

$$l_{54} = \frac{b_{54} - l_{51}l_{41} - l_{52}l_{42} - l_{43}l_{53}}{l_{44}}$$
$$= \frac{0 - (0{,}8165)(0) - (0)(1) - (0{,}8165)(0)}{\sqrt{5}} = 0$$

$$l_{55} = \sqrt{b_{55} - l^2{}_{51} - l^2{}_{52} - l^2{}_{53} - l^2{}_{54}}$$
$$= \sqrt{4 - (0{,}8165)^2 - (0)^2 - (0{,}8165)^2 - (0)^2} = 1.6330$$

$$l_{64} = \frac{b_{64} - l_{41}l_{61} - l_{42}l_{62} - l_{43}l_{63}}{l_{44}}$$
$$= \frac{0 - (0)(0) - (1)(1) - (0)(0)}{\sqrt{5}} = -0.4472$$

$$l_{65} = \frac{b_{65} - l_{51}l_{61} - l_{52}l_{62} - l_{53}l_{63} - l_{54}l_{63}}{l_{55}}$$

$$= \frac{0-(0{,}1865)(0)-(0)(1)-(0{,}1865)(0)}{\sqrt{5}} = 0$$

$$l_{66} = \sqrt{l^2{}_{61} - l^2{}_{62} - l^2{}_{63} - l^2{}_{64} - l^2{}_{65}}$$

$$= \sqrt{6-(0)^2-(1)^2-(0)^2-(-0{,}4472)^2-(0)^2} = 2.1909$$

maka diperoleh matriks L_{22} sebagai berikut:

$$L_{22} = \begin{bmatrix} 2.2361 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6330 & 0 \\ -0.4472 & 0 & 2.1909 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan elemen dari matriks partisi L yang diperoleh maka L dan L^T sebagai berikut:

$$L = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2.4495 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.4495 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1.0000 & 0 & 2.2361 & 0 & 0 \\ 0.8165 & 0 & 0.8165 & 0 & 1.6330 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & -0.4472 & 0 & 2.1909 \end{array}\right]$$

$$L^T = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2.4495 & 0 & 0 & 0 & 0{,}8165 & 0 \\ 0 & 2.0000 & 0 & 1.0000 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 2.4495 & 0 & 0.8165 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2.2361 & 0 & -0.4472 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.6330 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1909 \end{array}\right].$$

Langkah selanjutnya untuk menentukan solusi sistem persamaan linear *fuzzy* adalah dengan menghitung vektor B dengan menggunakan rumus berikut:

$$LB = Y$$

$$\begin{bmatrix} 2.4495 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.4495 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 2.2361 & 0 & 0 \\ 0.8165 & 0 & 0.8165 & 0 & 1.6330 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & -0.4472 & 0 & 2.1909 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \underline{b}_3 \\ \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \\ \overline{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+9r \\ -17+4r \\ 7+8r \\ 25-6r \\ -5-8r \\ 26-11r \end{bmatrix}$$

dari operasi perkalian matriks diperoleh persamaan berikut:

$$
\begin{array}{llllll}
2.4495\underline{b}_1 & & & & & = 10 + 9r \\
& 2.0000\underline{b}_2 & & & & = -17 + 4r \\
& & 2.4495\underline{b}_3 & & & = 7 + 8r \\
& 1.0000\underline{b}_2 & & + 2.2361\overline{b}_1 & & = 25 - 6r \\
0.8165\underline{b}_1 & & + 0.8165\underline{b}_3 & & + 1.6330\overline{b}_2 & = -5 - 8r \\
& 1.0000\underline{b}_2 & & - 0.4472\overline{b}_1 & + 2.1909\overline{b}_3 & = 26 - 11r
\end{array}
$$

sehingga didapatlah nilai dari B dengan cara berikut:

$$\underline{b}_1 = {(10 + 9r)}/_{2.4495} \qquad = 4.0825 + 3.6742r$$

$$\underline{b}_2 = {(-17 + 4r)}/_{2} \qquad = -8.5 + 2r$$

$$\underline{b}_3 = {(7 + 8r)}/_{2.4495} \qquad = 2.8577 + 3.2659r$$

$$\overline{b}_1 = {(33.5 - 8r)}/_{2.2361} \qquad = 14.9814 - 3.5777r$$

$$\overline{b}_2 = {(-10.6667 - 13.6667r)}/_{1.6330} \qquad = -6.7361 - 8.3691r$$

$$\overline{b}_3 = {(41.1997 - 14.5999r)}/_{2.1909} \qquad = 18.8051 - 6.6639r.$$

Langkah selanjutnya untuk menentukan solusi dari sistem persamaan *fuzzy* ini adalah menghitung nilai variabel X dengan operasi matriks berikut:

$$L^T X = B$$

$$
\begin{bmatrix}
2.4495 & 0 & 0 & 0 & 0.8165 & 0 \\
0 & 2.0000 & 0 & 1.0000 & 0 & 1.0000 \\
0 & 0 & 2.4495 & 0 & 0.8165 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2.2361 & 0 & -0.4472 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1.6330 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.1909
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3
\end{bmatrix}
= \begin{bmatrix}
4.0825 + 3.6742r \\ -8.5 + 2r \\ 2.8577 + 3.2659r \\ 14.9814 - 3.5777r \\ -6.7361 - 8.3691r \\ 18.8049 - 6.6639r
\end{bmatrix}
$$

dengan operasi perkalian matriks maka diperoleh persamaan berikut:

$$
\begin{array}{llllll}
2.4495\underline{x}_1 & & & + 0.8165\overline{x}_2 & & = 4.0825 + 3.6742r \\
& 2.0000\underline{x}_2 & + 1.0000\overline{x}_1 & & + 1.0000\overline{x}_3 & = -8.5 + 2r \\
& & 2.4495\underline{x}_3 & + 0.8165\overline{x}_2 & & = 2.8577 + 3.2659r \\
& & 2.2361\overline{x}_1 & & - 0.4472\overline{x}_3 & = 14.9814 - 3.5777r \\
& & & 1.6330\overline{x}_2 & & = -6.7361 - 8.3691r \\
& & & & 2.1909\overline{x}_3 & = 18.8051 - 6.6637r
\end{array}
$$

dengan demikian diperoleh nilai dari X sebagi berikut:

$$\overline{x}_3 = {}^{(18.8051 - 6.6639r)}\!/_{2.1909} \quad = 8.5833 - 3.0302r$$

$$\overline{x}_2 = {}^{(-6.7361 - 8.3691r)}\!/_{1.6330} \quad = -4.0000 - 5.1245r$$

$$\overline{x}_1 = {}^{(18.8203 - 4.9379r)}\!/_{2.2361} \quad = 8.4165 - 2.2083r$$

$$\underline{x}_3 = {}^{(6.2244 + 7.4504r)}\!/_{2.4495} \quad = 2.5410 + 3.0414r$$

$$\underline{x}_2 = {}^{(-25.4114 - 7.2499r)}\!/_{2} \quad = -12.7499 + 3.6249r$$

$$\underline{x}_1 = {}^{(7.3485 + 7.8587r)}\!/_{2.4495} \quad = 3.0000 + 3.2083r$$

jadi, penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* diperoleh sebagai berikut:

$$\tilde{x}_1 = \left(\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r)\right) = (\ 3.0000 + 3.2083r, 8.4165 - 2.2083r\ )$$
$$\tilde{x}_2 = \left(\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r)\right) = (-12.7499 + 3.6249r, -4.0000 - 5.1245r)$$
$$\tilde{x}_3 = \left(\underline{x}_3(r), \overline{x}_3(r)\right) = (2.5410 + 3.0414r, 8.5832 - 3.0302r)$$

Berdasarkan definisi 4.1.1 solusi dari sistem persamaan linear *fuzzy* adalah:

$$
\begin{aligned}
\underline{u}_1(r) &= \min\left\{\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r), \underline{x}_1(1), \overline{x}_1(1)\right\} \\
&= \min\{\ 3.0000 + 3.2083r, 6.208, 8.4165 - 2.2083r, 6{,}208\} \\
&= 3.0000 + 3.2083r
\end{aligned}
$$

$$\underline{u}_1(r) = \underline{x}_1(r)$$

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_1(r) &= \text{maks}\left\{\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r), \underline{x}_1(1), \overline{x}_1(1)\right\} \\
&= \text{maks}\{3.0000 + 3.2083r, 6.208, 8.4165 - 2.2083r, 6{,}208\} \\
&= 8.4165 - 2.2083r
\end{aligned}
$$

$\overline{u}_1(r) = \overline{x}_1(r)$

$$\underline{u}_2(r) = \min\{\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r), \underline{x}_2(1), \overline{x}_1(1)\}$$
$$= \min\{-12.7499 + 3.6249r, -9.125, -4.0000 - 5.1245r - 9.125\}$$
$$= -12.7499 + 3.6249r$$

$\underline{u}_2(r) = \underline{x}_2(r)$

$$\overline{u}_2(r) = \text{maks}\{\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r), \underline{x}_2(1), \overline{x}_1(1)\}$$
$$= \text{maks}\{-12.7499 + 3.6249r, -9.125, -4.0000 - 5.1245r, -9.125,\}$$
$$= -4.0000 - 5.1245r$$

$\overline{u}_2(r) = \overline{x}_2(r)$

$$\underline{u}_3(r) = \min\{\underline{x}_3(r), \overline{x}_3(r), \underline{x}_3(1), \overline{x}_1(1)\}$$
$$= \min\{2.5410 + 3.0414r, 5.542, 8.5832 - 3.0302r, 5.542\}$$
$$= 2.5410 + 3.0414r$$

$\underline{u}_3(r) = \underline{x}_3(r)$

$$\overline{u}_3(r) = \text{maks}\{\underline{x}_3(r), \overline{x}_3(r), \underline{x}_3(1), \overline{x}_1(1)\}$$
$$= \text{maks}\,\{2.5410 + 3.0414r, 5.542, 8.5832 - 3.0302r, 5.542\}$$
$$= 8.5832 - 3.0302r$$

$\overline{u}_3(r) = \overline{x}_3(r)$.

Berdasarkan penjabaran solusi sistem persamaan linear *fuzzy* maka diperoleh:

$\tilde{u}_1 = (3.0000 + 3.2083r, 8.4165 - 2.2083r)$

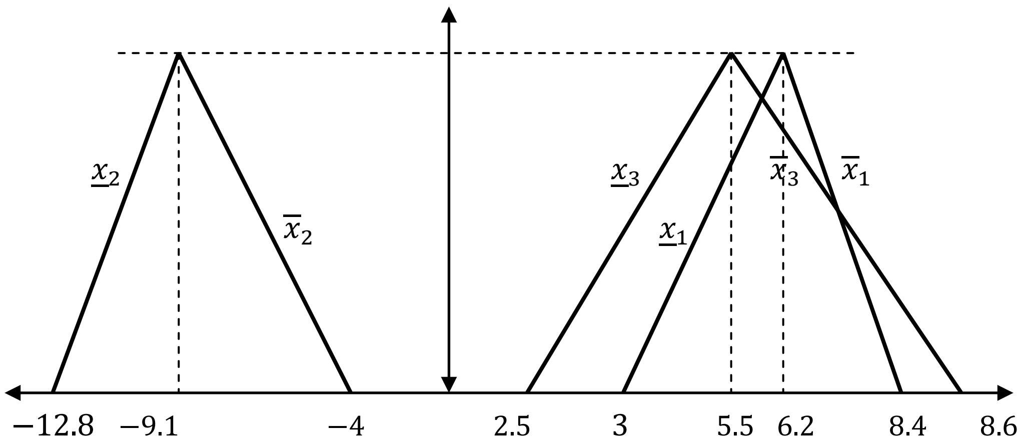
$\tilde{u}_2 = (-12.7499 + 3.6249r, -4.0000 - 5.1245r)$

$\tilde{u}_3 = (2.5410 + 3.0414r, 8.5832 - 3.0302r)$.

Berdasarkan persamaan (2.3) maka penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* tersebut dapat dinyatakan dengan bilangan *fuzzy* segitiga sebagai berikut:

$\tilde{x}_1 = (3.0000,\ 6.208,\ 8.4165)$, $\tilde{x}_2 = (-12.7499, -9.125, -4.0000)$ dan $\tilde{x}_3 = (2.5410, 5.542, 8.5832)$.

Grafik untuk sistem persamaan linear *fuzzy* ini dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 4.2 Grafik Fungsi Keanggotaan Segitiga dari $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ dan $\tilde{x}_3$

Berdasarkan hasil dari penyelesaian diperoleh bahwa solusi dari sistem persamaan linear *fuzzy* tersebut adalah tunggal karena matriks koefisien S dan matriks persegi koefisien A nonsingular. Solusi dari penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* ini adalah kuat karena hasil dari penyelesaian diperoleh $\tilde{u}_1 = \tilde{x}_1, \tilde{u}_2 = \tilde{x}_2$ dan $\tilde{u}_3 = \tilde{x}_3$.

Penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* menggunakan Dekomposisi *Cholescy* berdasarkan pemaparan contoh pertama, diperoleh sebuah bentuk solusi tunggal dan berdasarkan definisi 4.1 diperoleh nilai $\tilde{u}_1 = \tilde{x}_1, \tilde{u}_2 = \tilde{x}_2$ maka dari itu disebut solusi *fuzzy* kuat. Solusi sistem persamaan linear *fuzzy* pada pemaparan contoh kedua diperoleh sebuah bentuk solusi tunggal dan berdasarkan definisi 4.1 diperoleh nilai $\tilde{u}_1 = \tilde{x}_1$, $\tilde{u}_2 = \tilde{x}_2$ dan $\tilde{u}_3 = \tilde{x}_3$ oleh karena itu disebut solusi *fuzzy* kuat.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh kesimpulan bahwa sistem persamaan linear *fuzzy* $A\tilde{x} = \tilde{y}$ dapat diselesaikan dengan Dekomposisi *Cholescy* dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengubah sistem persamaan linear *fuzzy* dengan n persamaan dan n variabel ke dalam matriks koefisien A.
2. Mengubah matriks koefisien A berukuran $n \times n$ ke dalam matriks koefisien baru dengan ukuran $2n \times 2n$ yaitu matriks S.
3. Menentukan nilai eigen dari matriks koefisien S jika nilai eigen bernilai positif maka lanjutkan ke langkah selanjutnya, jika nilai eigen ada bernilai negatif maka kembali ke langkah pertama.
4. Melakukan faktorisasi pada matriks S menjadi matriks L dan matriks L^T.
5. Menghitung vektor B dengan rumusan $LB = Y$.
6. Menghitung vektor X dengan rumusan $L^T X = B$.
7. Menentukan nilai $\overline{u}(r) = \text{maks}\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\}$ dan $\underline{u}(r) = \min\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\}$.

Solusi yang diperoleh dari penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* menggunakan Dekomposisi *Cholescy* dari pembahasan adalah tunggal.

5.2 Saran

Skripsi ini membahas suatu cara menyelesaikan sistem persamaan linear *fuzzy*. Sistem persamaan linear *fuzzy* dengan unsur-unsur dari A adalah bilangan riil dan vektor $\tilde{y}$ merupakan bilangan *fuzzy* dalam bentuk parameter yang berada pada interval $[0,1]$ diselesaikan dengan menggunakan Dekomposisi *Cholescy*. Bagi pembaca yang berminat dengan metode Dekomposisi *Cholescy* ini diharapkan penggunaannya dalam sebuah kasus yang berdeda. Unsur-unsur dari matriks A yang mana $\tilde{y}$ merupakan bilangan *fuzzy* segitiga dalam bentuk parameter.

DAFTAR PUSTAKA

Beta Noranita, ”*Sistem Persamaan Linear Fuzzy”,* vol. 11, no.2, Program Studi Ilmu Komputer, 9499, ISSN: 1410-8518, Agustus 2008, Semarang.

Dena, Gunawar A.D. *Linear Ajabra An Interaktive Approach*. USA: Thomson. 2004.

Happonen, Aki, dkk, “*A Reconfigurable Processing Element for Cholesky Decomposition and Matrix Inversion”,* vol 1, no 1, 2004.

Howard Anton . *Aljabar Linear Elementer* edisi kedelapan. Jakarta: Erlangga. 2000.

J.Supranto, MA. *Pengantar Matriks.* Jakarta: FEUI. 1974.

Ke Wang. *Pertubation Analysis for Singular Fuzzy Linear System.*1:1-6. 2012.

Leon J.Steven. *Aljabar Linear dan Aplikasi* edisi kelima. Jakarta: Erlangga. 2001.

Lipschutz, Seymour dan Lipson, March Lars. *Aljabar Linear* edisi ketiga. Jakarta: Erlangga. 2006.

M. Matinfar, S. H. Nasseri and M. Sohrabi*,”Solving Fuzzy Linear System of Equations by Using Householder Decomposition Method”,* Applied Mathematical Sciences, vol. 2, no. 52, 2569 – 2575, 2008.

Mahmoud Kaber, Sidi dan Allaire, Gregoire. *Numerical Liniear Aljabra.* USA: Springer. 2008.

P. Mansouri, dkk, “*Iterative Method for Solving Fuzzy Linear System”,* 1036-1049, 2011.

Setiawan, Agus, ST, MT. *Pengantar Metode Numerik.* Semarang: Andi. 2006.

Tofeigh Allahviranloo, dkk, ”*Positive Solution of Fuzzy Linear System”,* vol 3, no 4, winter 2006.

Widodo. *Himpunan Fuzzy dan Fuzzy Decision.* Yogyakarta: FMPA UGM. 2009